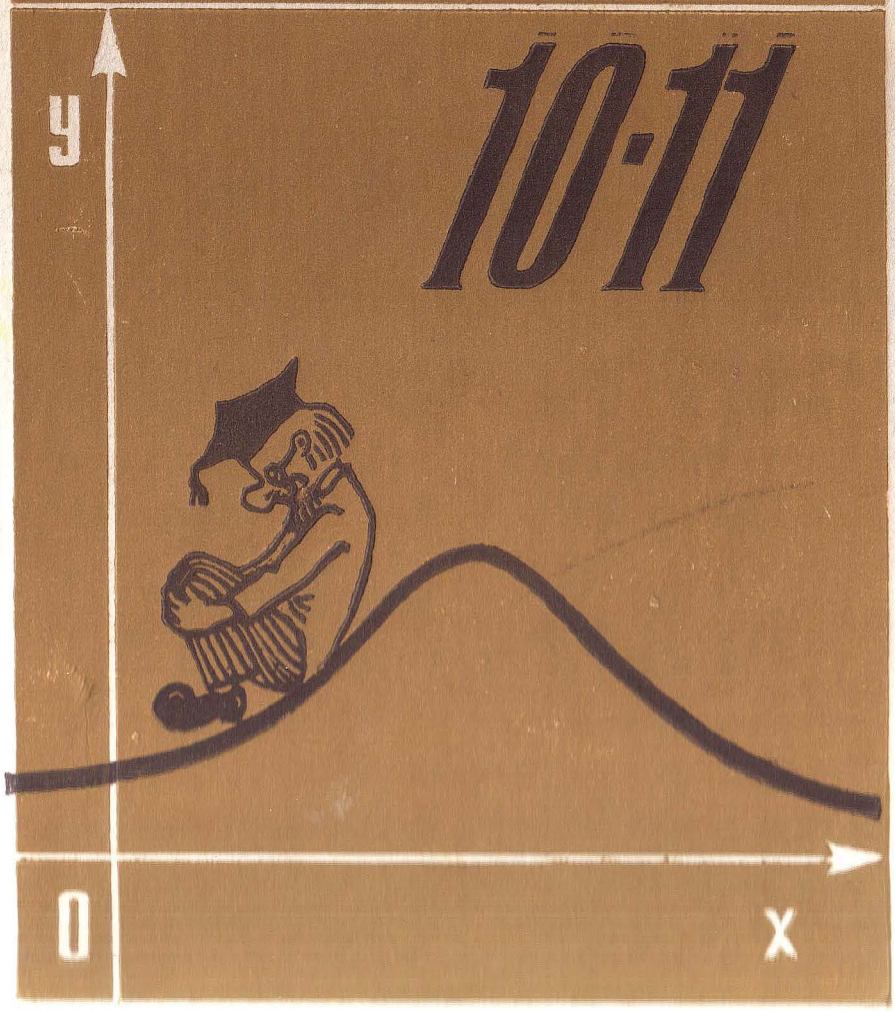
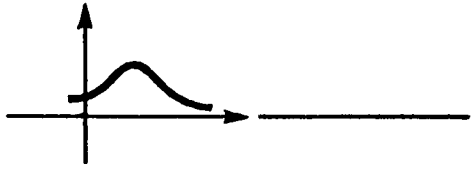
Алгебра и начала анализа

10-11



Алгебра и начала анализа

УЧЕБНИК ДЛЯ 10-11 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ



Утверждено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1992

ББК 22.14я72
А45

Авторы:
**Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров,
Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин**

Учебник занял третье место на Всесоюзном конкурсе учебников для средней общеобразовательной школы

Издание подготовлено под научным руководством академика *А. Н. Тихонова.*

Условные обозначения в учебнике

△ — начало решения задачи

▲ — окончание решения задачи

○ — начало обоснования утверждения

● — окончание обоснования утверждения

═══ — до этой черты расположены задачи обязательного минимума

* — дополнительные задачи, иногда более сложные

** — трудные задачи

| — выделение основного материала

— текст, который важно знать и полезно помнить (необязательно наизусть)

— материал, отсутствующий в программе, но авторы считают его полезным

Проверь себя — самостоятельная работа для проверки знаний по основному материалу

Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10—11 кл. сред. шк. / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.— М.: Просвещение, 1992.— 254 с.: ил.— ISBN 5-09-003850-3.

А $\frac{4306020500-199}{103(03)-92}$ письмо Гособразования СССР

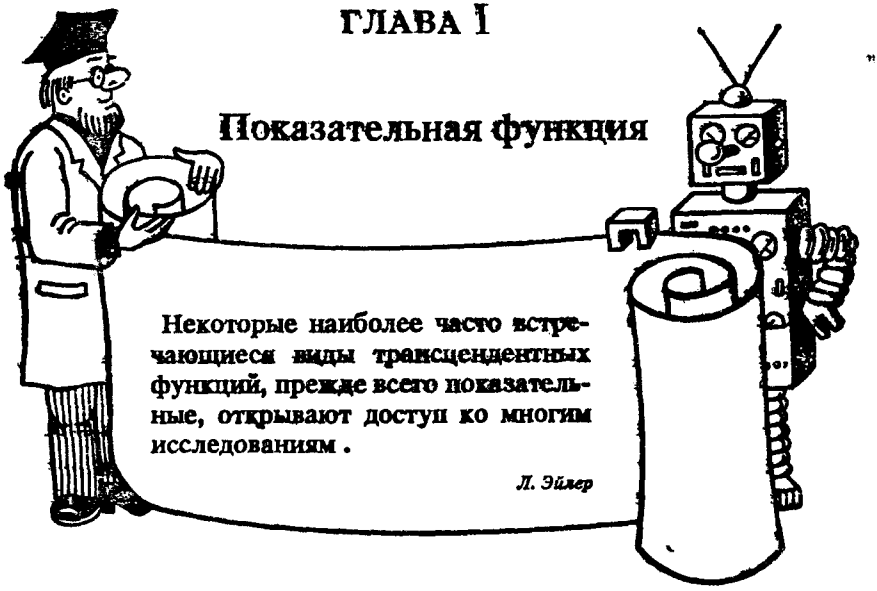
ББК 22.14я72 +
+ 22.161я72

SBN 5-09-003850-3

© Алимов Ш. А. и другие, 1992

ГЛАВА I

Показательная функция



Некоторые наиболее часто встречающиеся виды трансцендентных функций, прежде всего показательные, открывают доступ ко многим исследованиям.

Л. Эйлер

§ 1. СВОЙСТВА ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ГРАФИК

В курсе алгебры рассматривалась степень с действительным показателем. Напомним основные свойства степени. Пусть $a>0$, $b>0$, x, x_1 и x_2 — любые действительные числа. Тогда

$$a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2}, \tag{1}$$

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=a^{x_1-x_2}, \tag{2}$$

$$(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}, \tag{3}$$

$$(ab)^x=a^xb^x, \tag{4}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}, \tag{5}$$

$$a^x>0, \tag{6}$$

$$a^x>1, \text{ если } a>1,\ x>0. \tag{7}$$

Эйлер Леонард (1707—1783) — математик, механик, физик и астроном, академик Петербургской Академии Наук. Научные труды Л. Эйлера относились ко всем областям естествознания, к которым можно применить математические методы.

Кроме того, в курсе алгебры рассматривались функции $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$, $y=x^{\frac{1}{3}}$ и т. д., т. е. *степенные функции* $y=x^r$, где r — заданное число, а x — переменная.

В практике используются также функции $y=2^x$, $y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и т. д., т. е. функция вида $y=a^x$, где a — заданное число, а x — переменная. Такие функции называют *показательными*. Это название объясняется тем, что аргументом показательной функции является показатель степени, а основание степени — заданное число.

Показательной функцией называется функция $y=a^x$, где a — заданное число, $a>0$, $a\neq 1$.

Показательная функция обладает *следующими свойствами:*

1) *Область определения* показательной функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Это свойство следует из того, что степень a^x, где $a>0$, определена для всех $x\in\boldsymbol{R}$.

2) *Множество значений* показательной функции — множество всех положительных чисел.

Чтобы убедиться в этом, нужно показать, что уравнение $a^x=b$, где $a>0$, $a\neq 1$, не имеет корней, если $b\leqslant 0$, и имеет корень при любом $b>0$. По свойству степени (6) это уравнение не имеет корней, если $b\leqslant 0$. То, что это уравнение имеет корень при любом $b>0$, доказывается в курсе высшей математики. Это означает, что любая прямая $y=b$, где $b>0$, пересекается с графиком показательной функции.

3) Показательная функция $y=a^x$ является *возрастающей* на множестве всех действительных чисел, если $a>1$, и убывающей, если $0<a<1$.

○ Пусть $a>1$ и $x_2>x_1$. Покажем, что $y(x_2)>y(x_1)$, т. е. $a^{x_2}>a^{x_1}$.

Так как $x_2>x_1$, то $x_2-x_1>0$ и по свойству степени (7) имеем $a^{x_2-x_1}>1$, т. е. $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}>1$. Отсюда, учитывая, что $a^{x_1}>0$, получаем $a^{x_2}>a^{x_1}$.

Пусть $0<a<1$ и $x_2>x_1$. Покажем, что $y(x_2)<y(x_1)$, т. е. $a^{x_2}<a^{x_1}$.

Так как $0<a<1$, то $\frac{1}{a}>1$, и поэтому $\left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}>\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1}$, т. е. $\frac{1}{a^{x_2}}>\frac{1}{a^{x_1}}$, откуда $a^{x_2}<a^{x_1}$. ●

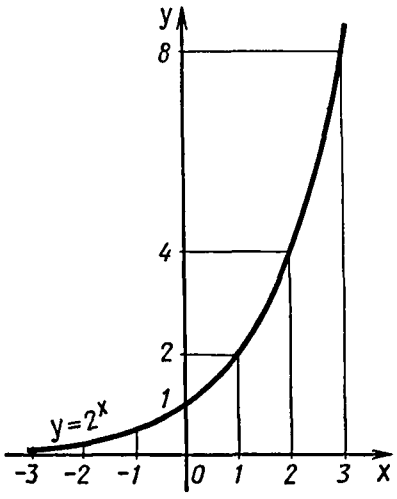


Рис. 1

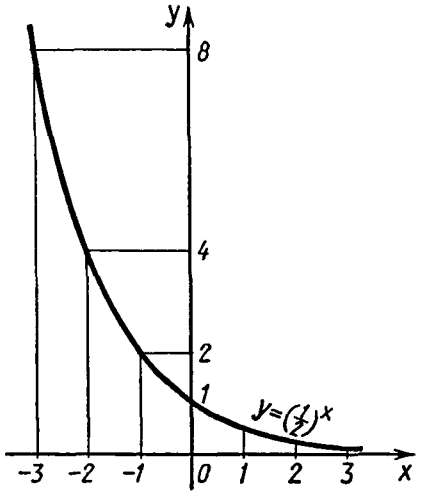


Рис. 2

Построим графики функций $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, используя рассмотренные свойства, по нескольким точкам, принадлежащим графику (рис. 1 и 2).

Отметим, что *график функции* $y=2^x$ *проходит через точку* (0; 1) *и расположен выше оси* Ox. Если $x<0$ и убывает, то график быстро приближается к оси Ox (но не пересекает ее); если $x>0$ и возрастает, то график быстро поднимается вверх. Такой же вид имеет график любой функции $y=a^x$, если $a>1$ (рис. 3).

График функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ *также проходит через точку* (0; 1) *и расположен выше оси* Ox. Если $x>0$ и возрастает, то график быстро приближается к оси Ox (не пересекая ее); если $x<0$ и убывает, то график быстро поднимается вверх. Такой же вид имеет график любой функции $y=a^x$, если $0<a<1$ (рис. 4).

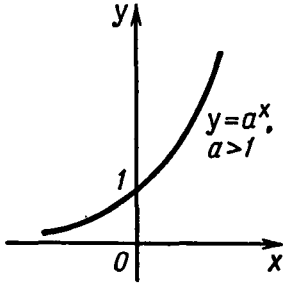


Рис. 3

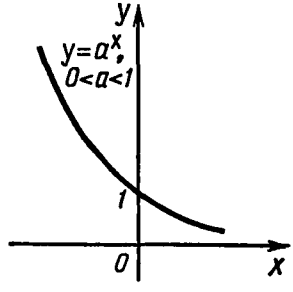


Рис. 4

Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов. Так, *радиоактивный распад* описывается формулой

$$m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}, \qquad (8)$$

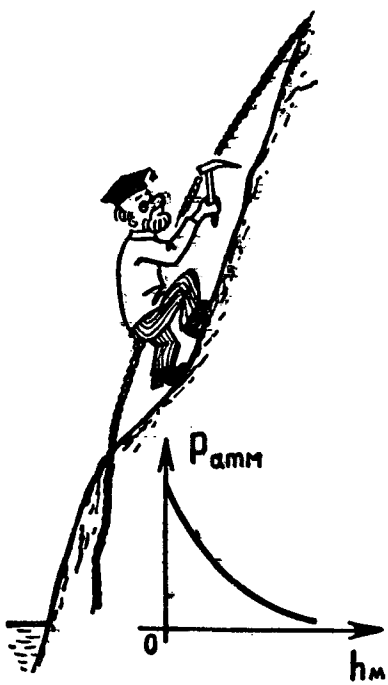
где $m(t)$ и m_0 — массы радиоактивного вещества соответственно в момент времени t и в начальный момент времени $t=0$, T — период полураспада (промежуток времени, за который первоначальное количество вещества уменьшается вдвое).

С помощью показательной функции выражается давление воздуха в зависимости от высоты подъема, ток самоиндукции в катушке после включения постоянного напряжения и т. д.

З а д а ч а 1. Решить уравнение $3^x=27$.

△ По свойству показательной функции данное уравнение имеет корень, так как $27>0$. Одним из корней является число $x=3$, так как $3^3=27$. Других корней нет, так как функция $y=3^x$ возрастает на всей числовой прямой, и поэтому $3^x>27$ при $x>3$ и $3^x<27$ при $x<3$ (рис. 5). ▲

З а д а ч а 2*. Период полураспада плутония равен 140 суткам. Сколько плутония останется через 10 лет, если его начальная масса равна 8 г?



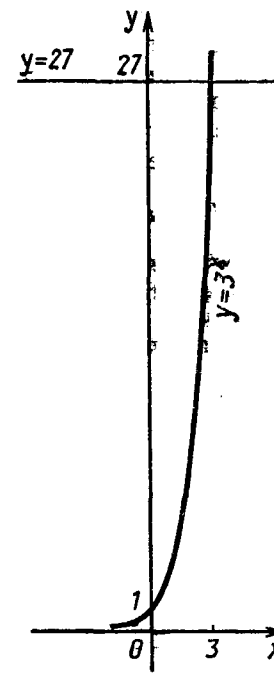


Рис. 5

△ Воспользуемся формулой (8). В данной задаче $t=10\cdot365$ (считаем, что в году 365 дней), $T=140$. $\frac{t}{T}=\frac{365}{14}$. Вычисления проведем на микрокалькуляторе МК-54 по программе

365 $\boxed{B\uparrow}$ 14 $\boxed{\div}$ 0,5 $\boxed{F}$ $\boxed{x^y}$ 8 $\boxed{\times}$ $1{,}1345092\cdot10^{-7}$.

Ответ. Через 10 лет плутония останется примерно $1{,}13\cdot10^{-7}$ г. ▲

Упражнения

1. Построить график функции:

1) $y=3^x$; 2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2. Используя график функции $y=3^x$, найти приближенное значение:

1) $\sqrt{3}$; 2) $3^{\frac{2}{3}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $3^{-1,5}$.

3. Изобразить схематически график функции:

1) $y=0{,}4^x$; 2) $y=(\sqrt{2})^x$; 3) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; 4) $y=(\sqrt{3})^x$.

4. (Устно.) Используя свойство возрастания или убывания показательной функции, сравнить числа:

1) $1{,}7^3$ и 1; 2) $0{,}3^2$ и 1; 3) $3{,}2^{1,5}$ и $3{,}2^{1,6}$;

4) $0{,}2^{-3}$ и $0{,}2^{-2}$; 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$; 6) 3^{π} и $3^{3,14}$.

5. Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y=2^x$ и $y=8$; 2) $y=3^x$ и $y=\frac{1}{3}$;

3) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y=\frac{1}{16}$; 4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y=9$.

6. (Устно.) Решить уравнение:

1) $5^x=\frac{1}{5}$; 2) $7^x=49$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt{3}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x=\sqrt[3]{7}$.

7. (Устно.) Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y=0{,}3^{-x}$; 2) $y=\left(\frac{1}{7}\right)^{-x}$; 3) $y=1{,}3^{-2x}$; 4) $0{,}7^{-3x}$.

8. Построить график функции:

1) $y=3^x-2$; 2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$; 3) $y=2^{|x|}$; 4) $y=3^{x-2}$.

9. Доказать, что графики функций $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат.

10*. Построить график функции:

1) $y=2^{|x|}$; 2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$; 3) $y=|3^x-2|$; 4) $y=2-3^x$.

11.** При радиоактивном распаде количество вещества уменьшается вдвое за сутки. Сколько вещества останется от 250 г через 1,5 суток? 3,5 суток? Вычисления провести на микрокалькуляторе.

12.** На некотором лесном участке можно заготовить $4\cdot10^5$ м^3 древесины. Ежегодный прирост деревьев равен 4%. Сколько можно заготовить древесины на этом участке через 5 лет? Вычисления провести на микрокалькуляторе.

§ 2. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Рассмотрим несколько примеров *показательных уравнений и неравенств*, т. е. уравнений и неравенств, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

1. Уравнения

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения

$$a^x=a^b,$$

где $a>0$, $a\neq1$, x — неизвестное. Это уравнение имеет единственный корень $x=b$, так как справедлива следующая теорема:

Теорема. Если $a>0$, $a\neq1$ и $a^{x_1}=a^{x_2}$, то $x_1=x_2$.

○ Предположим, что равенство $x_1=x_2$ не выполняется, т. е. $x_1<x_2$ или $x_1>x_2$. Пусть, например, $x_1<x_2$. Тогда если $a>1$, то показательная функция $y=a^x$ возрастает и поэтому должно выполняться неравенство $a^{x_1}<a^{x_2}$; если $0<a<1$, то функция убывает и должно выполняться неравенство $a^{x_1}>a^{x_2}$.

В обоих случаях получилось противоречие с условием $a^{x_1}=a^{x_2}$. ●

Задача 1. Решить уравнение $4\cdot2^x=1$.

△ Запишем уравнение в виде $2^{x+2}=2^0$, откуда $x+2=0$.

Ответ. $x=-2$. ▲

Задача 2. Решить уравнение $2^{3x} \cdot 3^x = 576$.

△ Так как $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$, $576 = 24^2$, то уравнение можно записать в виде $8^x \cdot 3^x = 24^2$ или в виде $24^x = 24^2$. Отсюда $x = 2$.

Ответ. $x = 2$. ▲

Задача 3. Решить уравнение $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$.

△ Вынося в левой части за скобки общий множитель 3^{x-2}, получаем $3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$; $3^{x-2} \cdot 25 = 25$, откуда $3^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$, $x = 2$.

Ответ. $x = 2$. ▲

Задача 4. Решить уравнение $3^x = 7^x$.

△ Так как $7^x \neq 0$, то уравнение можно записать в виде $\frac{3^x}{7^x} = 1$, откуда $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$, $x = 0$.

Ответ. $x = 0$. ▲

Задача 5. Решить уравнение

$$3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}.$$

△ Запишем уравнение в виде $3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 5^{x-2}$, откуда $2^{x-2}(3 \cdot 2^3 - 1) = 5^{x-2}(5^2 - 2)$, $2^{x-2} \cdot 23 = 5^{x-2} \cdot 23$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$.

Ответ. $x = 2$. ▲

Задача 6. Решить уравнение $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$.

△ Заменой $3^x = t$ данное уравнение сводится к квадратному уравнению $t^2 - 4t - 45 = 0$. Решая это уравнение, находим его корни: $t_1 = 9$, $t_2 = -5$, откуда $3^x = 9$, $3^x = -5$. Уравнение $3^x = 9$ имеет корень $x = 2$, а уравнение $3^x = -5$ не имеет корней, так как показательная функция не может принимать отрицательные значения.

Ответ. $x = 2$. ▲

2. Неравенства

Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств $a^x > a^b$ *или* $a^x < a^b$. Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции.

Задача 7. Решить неравенство $3^x<81$.

△ Запишем неравенство в виде $3^x<3^4$. Так как $3>1$, то функция $y=3^x$ является возрастающей. Следовательно, при $x<4$ выполняется неравенство $3^x<3^4$, а при $x\geqslant 4$ выполняется неравенство $3^x\geqslant 3^4$. Таким образом, при $x<4$ неравенство $3^x<3^4$ является верным, а при $x\geqslant 4$ — неверным, т. е. неравенство $3^x<81$ выполняется тогда и только тогда, когда $x<4$.

Ответ. $x<4$. ▲

Задача 8. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\sqrt{8}$.

△ Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x>2^{\frac{3}{2}} \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Так как $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ — убывающая функция, то $x<-\frac{3}{2}$.

Ответ. $x<-\frac{3}{2}$. ▲

Задача 9. Решить неравенство $16^x+4^x-2>0$.

△ Обозначим $4^x=t$, тогда получим квадратное неравенство $t^2+t-2>0$. Это неравенство выполняется при $t<-2$ и при $t>1$. Так как $t=4^x$, то получим два неравенства $4^x<-2$, $4^x>1$. Первое неравенство не имеет решений, так как $4^x>0$ при всех $x\in R$. Второе неравенство можно записать в виде $4^x>4^0$, откуда $x>0$.

Ответ. $x>0$. ▲

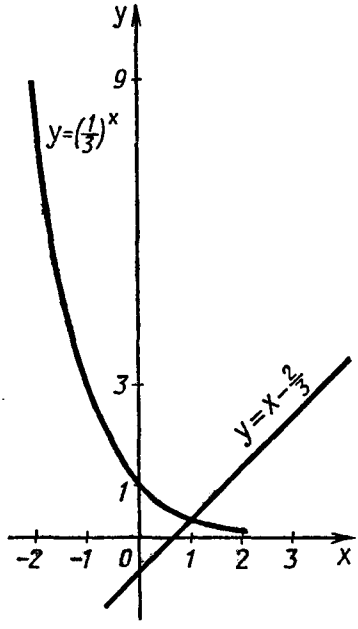


Рис. 6

Задача 10*. Решить графически уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x-\frac{2}{3}$.

△ Построим графики функций $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y=x-\frac{2}{3}$ (рис. 6).

Из рисунка видно, что графики этих функций пересекаются в точке с абсциссой $x\approx 1$. Проверка показывает, что $x=1$ — корень данного уравнения:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3} \text{ и } 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Покажем, что других корней нет. Функция $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывающая, а функция $y=x-\frac{2}{3}$ возрастающая. Следовательно, при $x>1$ значения первой функции меньше $\frac{1}{3}$, а второй — больше $\frac{1}{3}$; при $x<1$, наоборот, значения первой функции больше $\frac{1}{3}$, а второй — меньше $\frac{1}{3}$. Геометрически (рис. 6) это означает, что графики этих функций при $x>1$ и $x<1$ «расходятся» и потому не могут иметь точек пересечения при $x\neq 1$. ▲

Заметим, что из решения этой задачи, в частности, следует, что неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x>x-\frac{2}{3}$ выполняется при $x<1$, а неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x<x-\frac{2}{3}$ — при $x>1$.

3. Системы уравнений

Задача 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y=-1, \\ 4^{x+y^2}=16. \end{cases}$$

△ Решим эту систему способом подстановки:

$$x=-2y-1,\ 4^{-2y-1+y^2}=4^2,$$

откуда $-2y-1+y^2=2$, $y^2-2y-3=0$, $y_1=3$, $y_2=-1$. Найдем значения x:

$$x_1=-2\cdot 3-1=-7,\ x_2=-2\cdot(-1)-1=1.$$

Ответ. $(-7;\ 3)$, $(1;\ -1)$. ▲

Задача 12*. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{y+1}-2^x=5, \\ 4^x-6\cdot 3^y+2=0. \end{cases}$$

△ Обозначим $2^x=u$, $3^y=v$. Тогда система запишется так:

$$\begin{cases} 3v-u=5, \\ u^2-6v+2=0. \end{cases}$$

Решим эту систему способом подстановки:

$$u=3v-5,\ (3v-5)^2-6v+2=0,$$

$9v^2-36v+27=0$, $v^2-4v+3=0$, $v_1=1$, $v_2=3$. Найдем значения u: $u_1=-2$, $u_2=4$. Возвратимся к принятым обозначениям:

1) $2^x=-2$, $3^y=1$. Так как первое из этих уравнений корней не имеет, то решений системы в этом случае нет.

2) $2^x=4$, $3^y=3$, откуда $x=2$, $y=1$.

Ответ. (2; 1). ▲

Упражнения

Решить уравнение (13—18).

13. 1) $4^{x-1}=1$; 2) $0{,}3^{3x-2}=1$;

3) $2^{2x}=2^{4\sqrt{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

14. 1) $27^x=\frac{1}{3}$; 2) $400^x=\frac{1}{20}$; 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=25$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$.

15. 1) $3\cdot 9^x=81$; 2) $2\cdot 4^x=64$;

3) $3^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^{x-2}=1$; 4) $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=2$;

5) $0{,}6^{x+3}=0{,}6^{2x-5}$; 6) $6^{3x-1}=6^{1-2x}$.

16. 1) $3^{2x-1}+3^{2x}=108$; 2) $2^{3x+2}-2^{3x-2}=30$;

3) $2^{x+1}+2^{x-1}+2^x=28$; 4) $3^{x-1}-3^x+3^{x+1}=63$.

17. 1) $5^x=8^x$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $3^x=5^{2x}$; 4) $4^x=3^{\frac{x}{2}}$.

18. 1) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$; 2) $16^x-17\cdot 4^x+16=0$;

3) $25^x-6\cdot 5^x+5=0$; 4) $64^x-8^x-56=0$.

19. Решить неравенство:

1) $3^x>9$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\frac{1}{4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x<2$;

4) $4^x<\frac{1}{2}$; 5) $2^{3x}\geqslant\frac{1}{2}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}\leqslant\frac{1}{9}$.

20. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}2x-y=1,\\ 5^{x+y}=25;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=2,\\ 3^{x^2+y}=\frac{1}{9}.\end{cases}$

Решить уравнение (21—28).

21. 1) $3^{x^2+x-12}=1$; 2) $2^{x^2-7x+10}=1$;

3) $2^{\frac{x-1}{x-2}}=4$; 4) $0{,}5^{\frac{1}{x}}=4^{\frac{1}{x+1}}$.

22. 1) $0{,}3^{x^3-x^2+x-1}=1$; 2) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3}=1$;

3) $5{,}1^{\frac{1}{2}(x-3)}=5{,}1\sqrt{5{,}1}$; 4) $100^{x^2-1}=10^{1-5x}$.

23. 1) $10^x=\sqrt[3]{100}$; 2) $10^x=\sqrt[5]{10\,000}$; 3) $225^{2x^2-24}=15$;

4) $10^x=\frac{1}{\sqrt[4]{10\,000}}$; 5) $(\sqrt{10})^x=10^{x^2-x}$; 6) $100^{x^2-1}=10^{1-5x}$.

24. 1) $2^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}x}=\sqrt[4]{8}$; 2) $5^{0{,}1x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-0{,}06}=5^{x^2}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$; 4) $0{,}7^{\sqrt{x+12}}\cdot 0{,}7^{-2}=0{,}7^{\sqrt{x}}$.

25. 1) $7^x-7^{x-1}=6$; 2) $3^{2y-1}+3^{2y-2}-3^{2y-4}=315$;

3) $5^{3x}+3\cdot 5^{3x-2}=140$; 4) $2^{x+1}+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^x+6=0$.

26. 1) $7^{x-2}=3^{2-x}$; 2) $2^{x-3}=3^{3-x}$;

3) $3^{\frac{x+2}{4}}=5^{x+2}$; 4) $4^{\frac{x-3}{2}}=3^{2(x-3)}$.

27. 1) $3^{x+3}+3^x=7^{x+1}+5\cdot 7^x$;

2) $3^{x+4}+3\cdot 5^{x+3}=5^{x+4}+3^{x+3}$;

3) $2^{8-x}+7^{3-x}=7^{4-x}+2^{3-x}\cdot 11$;

4) $2^{x+1}+2^{x-1}-3^{x-1}=3^{x-2}-2^{x-3}+2\cdot 3^{x-3}$.

28. 1) $8\cdot 4^x-6\cdot 2^x+1=0$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x-6=0$;

3) $13^{2x+1}-13^x-12=0$; 4) $3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3=0$;

5) $2^{3x}+8\cdot 2^x-6\cdot 2^{2x}=0$; 6) $5^{3x+1}+34\cdot 5^{2x}-7\cdot 5^x=0$.

Решить неравенство (29—31).

29. 1) $5^{x-1}\leqslant\sqrt{5}$; 2) $3^{\frac{x}{2}}>9$; 3) $3^{x^2-4}\geqslant 1$;

4) $2^{-x^2+3x}<4$; 5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x}\geqslant\frac{9}{7}$; 6) $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x}<\frac{121}{169}$.

30. 1) $3^{x+2}+3^{x-1}<28$; 2) $2^{x-1}+2^{x+3}>17$;

3) $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}\geqslant 448$; 4) $5^{3x+1}-5^{3x-3}\leqslant 624$.

31. 1) $9^x-3^x-6>0$; 2) $4^x-2^x<12$;
3) $5^{2x+1}+4\cdot5^x-1>0$; 4) $3\cdot9^x+11\cdot3^x<4$.

32. Решить графически уравнение:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x+1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x-\frac{1}{2}$;

3) $2^x=-x-\frac{7}{4}$; 4) $3^x=11-x$.

33*. Решить графически неравенство:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x\geqslant x+1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x<x-\frac{1}{2}$;

3) $2^x\leqslant9-\frac{1}{3}x$; 4) $3^x>-\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$.

34*. Решить графически уравнение:

1) $2^x=3-2x-x^2$; 2) $3^{-x}=\sqrt{x}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=-\frac{3}{x}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x^3-1$.

35. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}5^x-5^y=100,\\5^{x-1}+5^{y-1}=30;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^x-9\cdot3^y=7,\\2^x\cdot3^y=\frac{8}{9}.\end{cases}$

36*. При каких значениях x сумма чисел 2^{x-1}, 2^{x-4} и 2^{x-2} равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии 6,5; 3,25; 1,625; ...?

37*. Решить уравнение:

1) $3^{2x+6}=2^{x+3}$; 2) $5^{x-2}=4^{2x-4}$;

3) $2^x\cdot3^x=36^{x^2}$, 4) $9^{-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{27}$.

38.** Решить неравенство:

1) $0{,}4^x-2{,}5^{x+1}>1{,}5$; 2) $25\cdot0{,}04^{2x}>0{,}2^{x(3-x)}$;

3) $\frac{4^x}{4^x-3^x}<4$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-32\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1}<0$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

39. Сравнить числа:

1) $4^{-\sqrt{3}}$ и $4^{-\sqrt{2}}$; 2) $2^{\sqrt{3}}$ и $2^{1,7}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ и $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$.

40. Сравнить с единицей число:

1) $2^{-\sqrt{5}}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

41. (Устно.) Является ли функция возрастающей или убывающей:

1) $y=0{,}78^x$; 2) $y=1{,}69^x$;

3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$; 4) $y=4^{-x}$?

42. В каком промежутке находятся значения функции при $x\in[-1;\ 2]$:

1) $y=5^x$; 2) $y=5^{-x}$?

Решить уравнение **(43—45)**.

43. 1) $1{,}5^{5x-7}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$; 2) $0{,}75^{2x-3}=\left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$;

3) $5^{x^2-5x-6}=1$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-2}=\frac{1}{7}$.

44. 1) $2^x+2^{x-3}=18$; 2) $3^x+4\cdot 3^{x+1}=13$;

3) $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9$;

4) $5^{x+1}+3\cdot 5^{x-1}-6\cdot 5^x+10=0$.

45. 1) $5^{2x}-5^x-600=0$;

2) $9^x-3^x-6=0$;

3) $3^x+9^{x-1}-810=0$;

4) $4^x+2^{x+1}-80=0$.

46. Решить неравенство:

1) $3^{x-2}>9$; 2) $5^{2x}<\frac{1}{25}$;

3) $0{,}7^{x^2+2x}<0{,}7^3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}>\frac{1}{81}$.

47. Решить графически уравнение:

1) $2^x=3x+10$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=2x+5$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Построить схематически график функции:

$$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x,\ y=5^x.$$

2. Сравнить числа:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2} \text{ и } \left(\frac{1}{5}\right)^{1,2};\ 5^{-0,2} \text{ и } 5^{-1,2}.$$

3. Решить уравнение:

$$3^{x+1}=27^{x-1};$$

$$0,2^{x^2+4x-5}=1;\ 2^{x+3}-2^{x+1}=12;\ 4\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+1=0.$$

4. Решить неравенство:

$$7^{x-2}>49;\ (0,5)^{x^2-2}\geqslant\frac{1}{4}.$$

---

48. Доказать, что последовательность значений функции $y=2^x$ при натуральных значениях x составляет геометрическую прогрессию.

49. За первый год работы предприятие имело a рублей прибыли. В дальнейшем каждый год прибыль увеличивалась на $p\%$. Какой станет прибыль предприятия за n-й год работы?

50. Построить график функции:

1) $y=3^x-1$; 2) $y=3^{x-1}$;

3) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}-2$; 4) $y=2^{2-x}+3$.

Решить уравнение **(51—53)**.

51. 1) $0,6^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$; 2) $16\sqrt{0,25^{5-\frac{x}{4}}}=2^{\sqrt{x+1}}$.

52. 1) $2\cdot 3^{3x-1}+27^{x-\frac{2}{3}}=9^{x-1}+2\cdot 3^{2x-1}$;

2) $2^{\sqrt{x}+2}-2^{\sqrt{x}+1}=12+2^{\sqrt{x}-1}$;

3) $22\cdot 9^{x-1}-\frac{1}{3}\cdot 3^{x+3}+\frac{1}{3}\cdot 3^{x+2}=4$;

4) $5\cdot 4^{x-1}-16^x+0,25\cdot 2^{2x+2}+7=0$.

53. 1) $2^{x+4}+2^{x+2}=5^{x+1}+3\cdot 5^x$;

2) $5^{2x}\cdot 7^x-5^{2x}\cdot 17+7^x\cdot 17=0$;

3) $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$;

4) $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$.

54. Решить неравенство:

1) $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+1}}<1$;

2) $2^{x^2}\cdot 5^{x^2}<10^{-3}\,(10^{3-x})^2$;

3) $\frac{4^x-2^{x+1}+8}{2^{1-x}}<8^x$;

4) $\frac{1}{3^x+5}\leqslant\frac{1}{3^{x+1}-1}$.

55. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}2^{x-y}=128,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2y+1}=\frac{1}{8};\end{cases}$

2) $\begin{cases}2^x\cdot 5^y=10,\\ 5^y-2^x=3.\end{cases}$

56*. Построить график функции:

1) $y=2^{x+|x|}$;

2) $y=|3^{|x|}-3|$.

57*. Решить уравнение:

1) $\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}}=5\cdot 0{,}04^x$;

2) $4\cdot 3^x-9\cdot 2^x=5\cdot 3^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{2}}$;

3) $2\cdot 4^x-3\cdot 10^x-5\cdot 25^x=0$;

4) $4\cdot 9^x+12^x-3\cdot 16^x=0$.

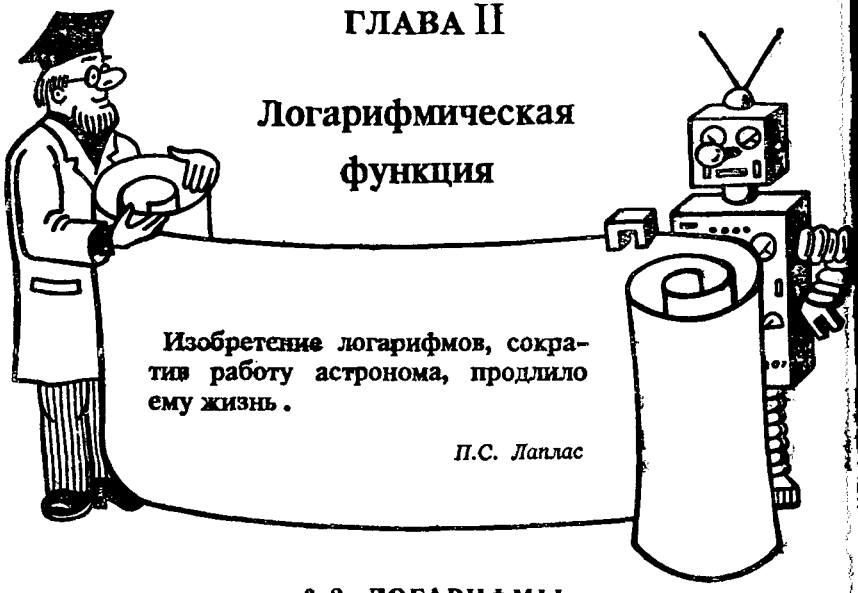
58.** Решить неравенство:

1) $3^{|x-2|}<9$;

2) $4^{|x+1|}>16$;

3) $2^{|x-2|}>4^{|x+1|}$;

4) $5^{|x+4|}<25^{|x|}$.



ГЛАВА II

Логарифмическая функция

Изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь.

П.С. Лаплас

§ 3. ЛОГАРИФМЫ

З а д а ч а 1. Найти положительный корень уравнения $x^4=81$.

△ По определению арифметического корня имеем

$$x=\sqrt[4]{81}=3. \blacktriangle$$

З а д а ч а 2. Решить уравнение $3^x=81$.

△ Запишем данное уравнение так: $3^x=3^4$, откуда $x=4$. ▲

В задаче 1 неизвестным является основание степени, а в задаче 2 — показатель степени.

Способ решения задачи 2 состоял в том, что левую и правую части уравнения удалось представить в виде степени с одним и тем же основанием 3. Но уже, например, уравнение $3^x=80$ таким способом решить не удается. Однако вы знаете, что это уравнение имеет корень. Чтобы уметь решать такие уравнения, вводится понятие *логарифма числа.*

В § 2 было сказано, что уравнение $a^x=b$, где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, имеет единственный корень. Этот корень называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают $\log_a b$. Например, корнем уравнения $3^x=81$ является число 4, т. е. $\log_3 81=4$.

Лаплас Пьер Симон (1749—1827) — французский математик, физик и астроном, адъюнкт Французской Академии Наук. После Великой Французской революции принимал активное участие в реорганизации системы образования. Важнейшие направления его исследований — математика, небесная механика и математическая физика. Один из создателей теории вероятностей.

Итак, *логарифмом положительного числа b по основанию a*, где $a>0$, $a\neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

Например, $\log_2 8=3$, так как $2^3=8$; $\log_3 \frac{1}{9}=-2$, так как $3^{-2}=\frac{1}{9}$; $\log_7 7=1$, так как $7^1=7$; $\log_4 1=0$, так как $4^0=1$.

Определение логарифма можно кратко записать так:

$$a^{\log_a b}=b.$$

Это равенство справедливо при $b>0$, $a>0$, $a\neq 1$. Его обычно называют *основным логарифмическим тождеством.*

Например, $4^{\log_4 5}=5$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3}=3$; $13^{\log_{13}\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$.

С помощью основного логарифмического тождества можно показать, например, что $x=\log_3 80$ является корнем уравнения $3^x=80$. В самом деле, $3^{\log_3 80}=80$.

Действие нахождения логарифма числа называют *логарифмированием.*

Задача 3. Вычислить $\log_{64} 128$.

Δ Обозначим $\log_{64} 128=x$. По определению логарифма $64^x=128$. Так как $64=2^6$, $128=2^7$, то $2^{6x}=2^7$, откуда $6x=7$, $x=\frac{7}{6}$.

Ответ. $\log_{64} 128=\frac{7}{6}$. ▲

Задача 4. Вычислить $3^{-2\log_3 5}$.

Используя свойства степени и основное логарифмическое тождество, находим:

$$3^{-2\log_3 5}=(3^{\log_3 5})^{-2}=5^{-2}=\frac{1}{25}.$$ ▲

Задача 5. Решить уравнение $\log_3(1-x)=2$.

По определению логарифма $3^2=1-x$, откуда $x=-8$. ▲

Задача 6*. При каких значениях x существует $\log_5 \frac{x-1}{2-x}$?

Так как основание логарифма $5>0$ и $5\neq 1$, то данный логарифм существует тогда и только тогда, когда $\frac{x-1}{2-x}>0$.

Решая это неравенство, находим $1<x<2$. ▲

Упражнения

Вычислить (59—66).

59. 1) $\log_2 16$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_2 2$;
4) $\log_2 1$; 5) $\log_2 \frac{1}{2}$; 6) $\log_2 \frac{1}{8}$.

60. 1) $\log_3 27$; 2) $\log_3 81$; 3) $\log_3 3$;
4) $\log_3 1$; 5) $\log_3 \frac{1}{9}$; 6) $\log_3 \frac{1}{3}$.

61. 1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 3) $\log_{0,5} 0{,}125$;
4) $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; 5) $\log_{0,5} 1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$.

62. 1) $\log_5 625$; 2) $\log_6 216$; 3) $\log_4 \frac{1}{16}$; 4) $\log_5 \frac{1}{125}$.

63. 1) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 27$; 3) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 36$.

64. 1) $3^{\log_3 18}$; 2) $5^{\log_5 16}$; 3) $10^{\log_{10} 2}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$.

65. 1) $3^{5 \log_3 2}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6 \log_{\frac{1}{2}} 2}$; 3) $0{,}3^{2 \log_{0,3} 6}$; 4) $7^{\frac{1}{2} \log_7 9}$.

66. 1) $8^{\log_2 5}$; 2) $9^{\log_3 12}$; 3) $16^{\log_4 7}$; 4) $0{,}125^{\log_{0,5} 1}$.

67. Решить уравнение:
1) $\log_6 x = 3$; 2) $\log_5 x = 4$; 3) $\log_2 (5-x) = 3$;
4) $\log_3 (x+2) = 3$; 5) $\log_{\frac{1}{4}} \left(x - \frac{1}{2}\right) = -2$;
6) $\log_{\frac{1}{6}} (0{,}5+x) = -1$.

Вычислить (68—70).

68. 1) $\log_2 \sqrt[4]{2}$; 2) $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}$; 3) $\log_{0,5} \frac{1}{\sqrt{32}}$; 4) $\log_7 \frac{\sqrt[3]{7}}{49}$.

69. 1) $9^{2 \log_3 5}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2} \log_3 4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5 \log_2 3}$;
4) $27^{-4 \log_{\frac{1}{3}} 5}$; 5) $10^{3-\log_{10} 5}$; 6) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2 \log_{\frac{1}{7}} 3}$.

70. 1) $\log_9 \log_3 81$; 2) $\log_3 \log_2 8$; 3) $2 \log_{27} \log_{10} 1000$;

4) $\frac{1}{4} \log_9 \log_7 8$; 5) $\log_4 \log_{16} 256 + \log_4 \sqrt{2}$;

6) $3 \log_9 \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2$.

Вычислить, при каких значениях x имеет смысл выражение (71—73).

71. 1) $\log_3 (12-x)$; 2) $\log_2 (x-12)$;

3) $\log_{\frac{1}{4}} (-x)$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{6}{2x-1}$.

72°. 1) $\log_6 (49-x^2)$; 2) $\log_7 (x^2+x-6)$; 3) $\log_3 (2-x-x^2)$;

4) $\log_5 (x^2+2x+7)$; 5) $\log_{36} \frac{2x+4}{x-3}$; 6) $\log_6 \frac{4-x}{3x+5}$.

Решить уравнение (73—74).

73. 1) $2^x=5$; 2) $1{,}2^x=4$; 3) $4^{2x+3}=5$; 4) $7^{1-2x}=2$.

74°. 1) $7^{2x}+7^x-12=0$; 2) $9^x-3^x-12=0$;

3) $8^{x+1}-8^{2x-1}=30$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x-5\left(\frac{1}{3}\right)^x+6=0$.

§ 4. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используются различные *свойства логарифмов*. Рассмотрим основные из них.

Пусть $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$, r — любое действительное число. Тогда справедливы формулы:

$$\log_a (bc)=\log_a b+\log_a c, \tag{1}$$

$$\log_a \frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c, \tag{2}$$

$$\log_a b^r=r\log_a b. \tag{3}$$

По основному логарифмическому тождеству

$$a^{\log_a b}=b, \tag{4}$$

$$a^{\log_a c}=c. \tag{5}$$

1) Перемножая равенства (4) и (5), получаем:

$$a^{\log_a b+\log_a c}=bc,$$

откуда по определению логарифма $\log_a b+\log_a c=\log_a (bc)$. Формула (1) доказана.

2) Разделив равенства (4) и (5), получим:

$$a^{\log_a b-\log_a c}=\frac{b}{c},$$

откуда по определению логарифма следует формула (2).

3) Возводя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b}=b$ в степень с показателем r, получаем:

$$a^{r\log_a b}=b^r,$$

откуда по определению логарифма следует формула (3). ●

Приведем примеры применения формул (1)—(3):

1) $\log_6 18+\log_6 2=\log_6 36=2$;

2) $\log_{12} 48-\log_{12} 4=\log_{12} 12=1$;

3) $\dfrac{\log_3 4}{\log_3 4^{\frac{1}{7}}}=\dfrac{\log_3 4}{\frac{1}{7}\log_3 4}=7.$

З а д а ч а. Вычислить $\log_5 \sqrt{3}-\frac{1}{2}\log_5 12+\log_5 50$.

△ Применяя формулы (1)—(3), находим:

$$\log_5 \sqrt{3}-\frac{1}{2}\log_5 12+\log_5 50=\log_5 \frac{\sqrt{3}\cdot 50}{\sqrt{12}}=\log_5 25=2.\ ▲$$

Упражнения

Вычислить (75—80).

75. 1) $\log_{10} 5+\log_{10} 2$; 2) $\log_{10} 8+\log_{10} 125$;

3) $\log_{12} 2+\log_{12} 72$; 4) $\log_3 6+\log_3 \frac{3}{2}$.

76. 1) $\log_2 15-\log_2 \frac{15}{16}$; 2) $\log_5 75-\log_5 3$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 54-\log_{\frac{1}{3}} 2$; 4) $\log_8 \frac{1}{16}-\log_8 32$.

77. 1) $\log_{13}\sqrt[5]{169}$; 2) $\log_{11}\sqrt[3]{121}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{243}$; 4) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{128}}$.

78. 1) $\log_8 12-\log_8 15+\log_8 20$;

2) $\log_9 15+\log_9 18-\log_9 10$;

3) $\frac{1}{2}\log_7 36-\log_7 14-3\log_7 \sqrt[3]{21}$;

4) $2\log_{\frac{1}{3}} 6-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400+3\log_{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{45}$.

79. 1) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}$; 2) $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$;

3) $\frac{\log_5 36-\log_5 12}{\log_5 9}$; 4) $\frac{\log_7 8}{\log_7 15-\log_7 30}$.

---

80. 1) $\frac{\log_2 24-\frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18-\frac{1}{3}\log_3 72}$; 2) $\frac{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}$;

3) $\frac{\log_2 4+\log_2\sqrt{10}}{\log_2 20+3\log_2 2}$; 4) $\frac{3\log_7 2-\frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_8 2+\frac{1}{3}\log_8 27}$.

81. Найти x по данному его логарифму ($a>0$, $b>0$):

1) $\log_3 x=4\log_3 a+7\log_3 b$;

2) $\log_5 x=2\log_5 a-3\log_5 b$.

82*. Вычислить:

1) $36^{\log_6 5}+10^{1-\log_{10} 2}-8^{\log_2 3}$;

2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

83**. Доказать, что если $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $p\neq 0$, то

$$\log_{a^p} b=\frac{1}{p}\log_a b.$$

Используя эту формулу, вычислить:

1) $\log_{36} 2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}} 3$;

2) $2\log_{25} 30+\log_{0,2} 6$.

§ 5. ДЕСЯТИЧНЫЕ И НАТУРАЛЬНЫЕ ЛОГАРИФМЫ

Для логарифмов чисел составлены специальные таблицы *(таблицы логарифмов)*. Логарифмы вычисляют также с помощью микрокалькулятора. И в том и в другом случае находятся только *десятичные* или *натуральные логарифмы.*

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число, приближенно равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Иррациональное число e играет важную роль в математике и ее приложениях. Число e можно представить как сумму:

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n}+\ldots .$$

Вычисление числа e на микрокалькуляторе проводится по программе:

$$1 \boxed{F} \boxed{e^x} \underline{2{,}7182818}.$$

Вычисления на микрокалькуляторе $\lg b$ и $\ln b$ проводятся соответственно по программам:

$$b \boxed{F} \boxed{\lg} \text{ и } b \boxed{F} \boxed{\ln}.$$

Например, вычисляя $\lg 13$, получаем:

$$13 \boxed{F} \boxed{\lg} \underline{1{,}1139433};$$

вычисляя $\ln 13$, получаем:

$$13 \boxed{F} \boxed{\ln} \underline{2{,}5649493}.$$

Оказывается, что достаточно знать значения только десятичных или только натуральных логарифмов чисел, чтобы находить логарифмы чисел по любому основанию. Для этого используется *формула перехода* от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию:

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad (1)$$

где $b>0$, $a>0$, $a\neq 1$, $c>0$, $c\neq 1$.

Докажем справедливость формулы (1).

○* Запишем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b}=b$. Возьмем от обеих его частей логарифмы по основанию c:

$$\log_c a^{\log_a b}=\log_c b.$$

Используя свойство логарифма степени, получаем:

$$\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b, \text{ откуда } \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}. \bullet$$

Из формулы (1) при $c=10$ и $c=e$ получаются формулы перехода к десятичным и натуральным логарифмам:

$$\log_a b=\frac{\lg b}{\lg a}, \quad \log_a b=\frac{\ln b}{\ln a}. \qquad (2)$$

З а д а ч а 1. С помощью микрокалькулятора МК-54 вычислить $\log_3 80$.

△ 1) С помощью десятичных логарифмов:

80 [F] [lg] 3 [F] [lg] [÷] 3,9886927.

2) С помощью натуральных логарифмов:

80 [F] [ln] 3 [F] [ln] [÷] 3,9886928.

О т в е т. $\log_3 80\approx 3{,}99$. ▲

Формула перехода от одного основания логарифма к другому иногда используется при решении уравнений.

З а д а ч а 2. Решить уравнение $\log_2 x+\log_4 x=\frac{3}{2}$.

△ По формуле перехода

$$\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{\log_2 x}{2}.$$

Поэтому уравнение принимает вид $\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x=\frac{3}{2}$, откуда

$\log_2 x=1$, $x=2$. ▲

З а д а ч а 3*. Двухпроцентный вклад в сбербанк, равный a рублям, через n лет становится равным $a\,(1{,}02)^n$, а трехпроцентный вклад становится равным $a\,(1{,}03)^n$. Через сколько лет каждый из вкладов удвоится?

△ 1) Для первого вклада $2a = a(1{,}02)^n$, откуда $(1{,}02)^n = 2$, $n = \log_{1{,}02} 2$. Вычисления проведем на МК-54:

2 [F] [ln] 1,02 [F] [ln] [÷] 36,002788.

2) Для второго вклада $n = \log_{1{,}03} 2$ и программа вычислений такова:

2 [F] [ln] 1,03 [F] [ln] [÷] 23,449772.

Ответ. По первому вкладу приближенно через 36 лет, а по второму — через 23,5 года.

Упражнения

Вычислить с помощью микрокалькулятора (84—85).

84. 1) $\lg 23$; 2) $\lg 7$; 3) $\lg 0{,}37$; 4) $\lg \frac{2}{3}$.

85. 1) $\ln 81$; 2) $\ln 2$; 3) $\ln 0{,}17$; 4) $\ln \frac{6}{7}$.

86. Выразить данный логарифм через десятичный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\log_7 25$; 2) $\log_5 8$; 3) $\log_9 0{,}75$; 4) $\log_{0{,}75} 1{,}13$.

87. Выразить данный логарифм через натуральный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\log_7 5$; 2) $\log_8 15$; 3) $\log_{0{,}7} 9$; 4) $\log_{1{,}1} 0{,}23$.

Решить уравнение (88—89).

88. 1) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$; 2) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$;

3) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$; 4) $\log_9 x^2 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$;

5) $\log_2 x + \log_8 x = 8$; 6) $\log_4 x - \log_{16} x = \frac{1}{4}$.

---

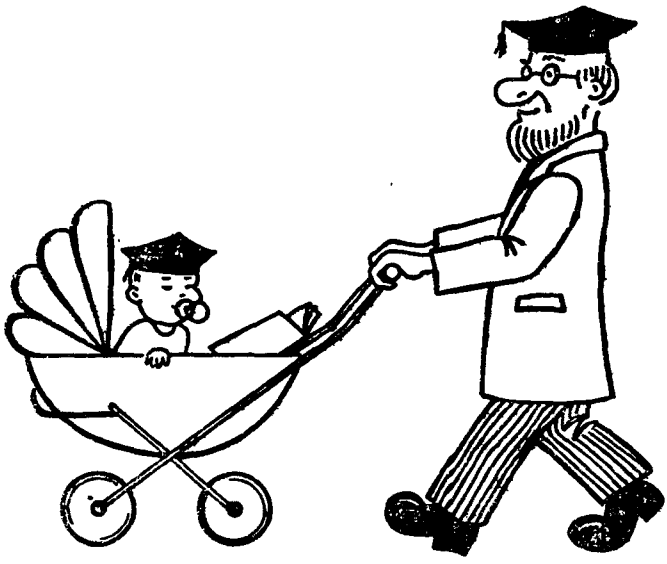
89. 1) $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$; 2) $\log_3^2 x - 15\log_{27} x + 6 = 0$;

3) $\log_5^2 x + 5\log_9 x - 1{,}5 = 0$; 4) $16\log_{16}^2 x + 3\log_4 x - 1 = 0$.

90*. Вычислить (не используя микрокалькулятор):

1) $\frac{\log_5 2}{\log_5 6} + \frac{\log_4 3}{\log_4 6}$; 2) $\left(\log_7 2 + \frac{1}{\log_5 7}\right)\lg 7$;

3) $\frac{2\log_2 3}{\log_4 9}$; 4) $\frac{\log_{27} 8}{\log_3 4}$.



91.** Число жителей города-новостройки увеличивается ежегодно на 8%. Через сколько лет число жителей удвоится?

92.** При одном качании поршневого насоса из сосуда удаляется 1,2% имеющегося в нем воздуха. Через сколько качаний насоса в сосуде останется $\frac{1}{10^{16}}$ часть первоначальной массы воздуха?

93.** Вычислить на микрокалькуляторе МК-54 приближенное значение числа e по формуле $e \approx 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n}$ при: 1) $n=7$; 2) $n=8$; 3) $n=9$; 4) $n=10$.

§ 6. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

В математике и ее приложениях часто встречается *логарифмическая функция*

$$y=\log_a x,$$

где a — заданное число, $a>0$, $a\neq 1$.

Логарифмическая функция обладает *следующими свойствами*:

1) *Область определения* логарифмической функции — множество всех положительных чисел.

Это следует из определения логарифма, так как выражение $\log_a x$ имеет смысл только при $x>0$.

2) *Множество значений* логарифмической функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Это следует из того, что для любого действительного числа b есть такое положительное число x, что $\log_a x=b$, т. е. уравнение $\log_a x=b$ имеет корень. Такой корень существует и равен $x=a^b$, так как $\log_a a^b=b$.

3) Логарифмическая функция $y=\log_a x$ является *возрастающей* на промежутке $x>0$, если $a>1$, и *убывающей*, если $0<a<1$.

○ Пусть $a>1$. Докажем, что если $x_2>x_1>0$, то $y(x_2)>y(x_1)$, т. е. $\log_a x_2>\log_a x_1$. Пользуясь основным логарифмическим тождеством, условие $x_2>x_1$ можно записать так: $a^{\log_a x_2}>a^{\log_a x_1}$. Из этого неравенства по свойству степени с основанием $a>1$ следует, что $\log_a x_2>\log_a x_1$.

Пусть $0<a<1$. Докажем, что если $x_2>x_1>0$, то $\log x_2<\log_a x_1$. Записав условие $x_2>x_1$ в виде $a^{\log_a x_2}>a^{\log_a x_1}$, получим $\log_a x_2<\log_a x_1$, так как $0<a<1$. ●

4) Если $a>1$, то функция $y=\log_a x$ принимает *положительные значения* при $x>1$, *отрицательные* — при $0<x<1$. Если $0<a<1$, то функция $y=\log_a x$ принимает положительные значения при $0<x<1$, отрицательные — при $x>1$.

Это следует из того, что функция $y=\log_a x$ принимает значение, равное нулю, при $x=1$ и является возрастающей на промежутке $x>0$, если $a>1$, и убывающей, если $0<a<1$.

Из рассмотренных свойств логарифмической функции $y=\log_a x$ следует, что ее график расположен правее оси Oy и имеет вид, указанный на рисунке 7, если $a>1$, и на рисунке 8, если $0<a<1$.

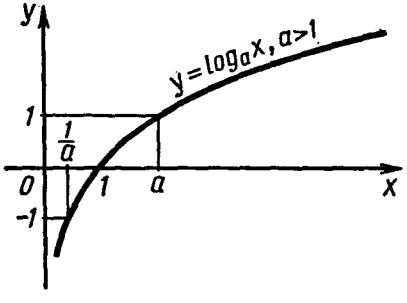


Рис. 7

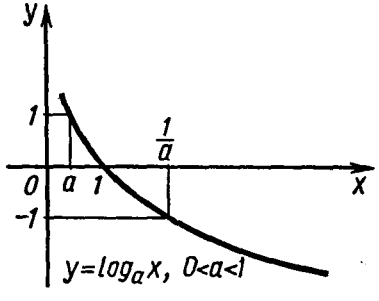


Рис. 8

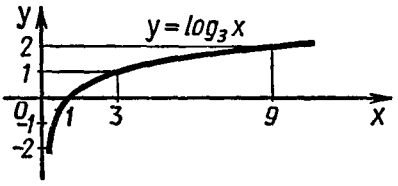


Рис. 9

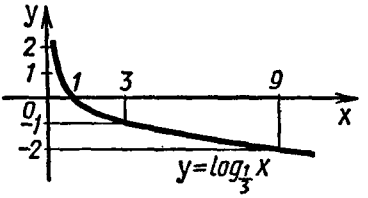


Рис. 10

На рисунке 9 изображен график функции $y=\log_3 x$, а на рисунке 10 — график функции $y=\log_{\frac{1}{3}} x$.

Отметим, что график любой логарифмической функции $y=\log_a x$ проходит через точку (1; 0).

При решении уравнений часто используется следующая теорема:

Теорема. Если $\log_a x_1=\log_a x_2$, где $a>0$, $a\neq 1$, $x_1>0$, $x_2>0$, то $x_1=x_2$.

○ Предположим, что $x_1\neq x_2$, например $x_2>x_1$. Если $a>1$, то из неравенства $x_2>x_1$ следует, что $\log_a x_2>\log_a x_1$; если $0<a<1$, то из неравенства $x_2>x_1$ следует, что $\log_a x_2<\log_a x_1$. В обоих случаях получилось противоречие с условием $\log_a x_1=\log_a x_2$. Следовательно, $x_1=x_2$. ●

Задача 1. Решить уравнение $\log_5(3x-2)=\log_5 7$.

△ Используя доказанную теорему, получаем $3x-2=7$, откуда $3x=9$, $x=3$. ▲

Задача 2. Решить неравенство $\log_2 x<3$.

△ Пользуясь тем, что $3=\log_2 2^3=\log_2 8$, запишем данное неравенство так: $\log_2 x<\log_2 8$. Так как функция $y=\log_2 x$ определена при $x>0$ и возрастает, то неравенство $\log_2 x<\log_2 8$ выполняется при $x>0$ и $x<8$.

Ответ. $0<x<8$. ▲

Задача 3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} x\leqslant -2$.

△ Запишем данное неравенство так: $\log_{\frac{1}{3}} x\leqslant\log_{\frac{1}{3}} 9$. Функция $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ определена при $x\geqslant 0$ и убывает, поэтому неравенство выполняется при $x>0$ и $x\geqslant 9$.

Ответ. $x\geqslant 9$. ▲

Упражнения

94. Сравнить числа:

1) $\log_3 \frac{6}{5}$ и $\log_3 \frac{5}{6}$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ и $\log_{\frac{1}{3}} 17$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} e$ и $\log_{\frac{1}{2}} \pi$; 4) $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

95. Выяснить, является ли положительным или отрицательным число:

1) $\log_3 4{,}5$; 2) $\log_3 0{,}45$; 3) $\log_5 25{,}3$; 4) $\log_{0,5} 9{,}6$.

96. Сравнить с единицей число x, если:

1) $\log_3 x = -0{,}3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 1{,}7$;

3) $\lg x = 0{,}2$; 4) $\log_2 x = 1{,}3$.

97. Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y = \log_{0,075} x$; 2) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$; 3) $y = \lg x$; 4) $y = \ln x$.

98. Построить график функции:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

99. По графику функции $y = \log_2 x$ найти приближенно $\log_2 3$; $\log_2 0{,}3$; $\log_2 5$; $\log_2 0{,}7$.

100. Изобразить схематически график функции:

1) $y = \lg x$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = \log_{0,4} x$; 4) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Решить неравенство (101—102).

101. 1) $\log_5 x > \log_5 3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} x \leqslant \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$;

3) $\lg x < \lg 4$; 4) $\ln x > \ln 0{,}5$.

102. 1) $\log_3 x < 2$; 2) $\log_{0,4} x > 2$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant 16$; 4) $\log_{0,4} x \leqslant 2$.

103. Решить уравнение:

1) $\log_3 (5x-1) = 2$; 2) $\log_5 (3x+1) = 2$;

3) $\log_4 (2x-3) = 1$; 4) $\log_7 (x+3) = 2$;

5) $\lg (3x-1) = 0$; 6) $\lg (2-5x) = 1$.

---

104. Построить график функции:

1) $y = \log_3 (x-1)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x+1)$;

3) $y = 1 + \log_3 x$; 4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$;

5) $y = 1 + \log_3 (x-1)$; 6) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x+1) - 1$.

105*. Решить графически уравнение:

1) $\log_2 x = -x+1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2x-5$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4x^2$; 4) $\log_3 x = 2-\frac{1}{3}x^2$.

106.** Построить график функции:

1) $y=|\log_3 x|$; 2) $y=\log_3 |x|$;

3) $y=\log_2 |3-x|$; 4) $y=|1-\log_2 x|$.

107.** Показать, что графики функций $y=\log_2 x$ и $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ симметричны относительно оси абсцисс.

§ 7. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Известно, что зависимость скорости v от времени t движения тела, брошенного вверх с начальной скоростью v_0, выражается формулой $v=v_0-gt$. Из этой формулы можно найти *обратную зависимость* — времени от скорости: $t=\frac{v_0-v}{g}$. Функцию $t(v)=\frac{v_0-v}{g}$ называют *обратной к функции* $v(t)=v_0-gt$, а функцию $v(t)$ — обратной к функции $t(v)$. Отметим, что в этом примере каждому значению t соответствует единственное значение v и, наоборот, каждому значению v соответствует единственное значение t.

Рассмотрим теперь показательную и логарифмическую функции. Обозначим символом $f(x)$ показательную функцию, а $g(x)$ — логарифмическую функцию:

$$f(x)=a^x,\ g(x)=\log_a x,$$

где a — заданное число, $a>0$, $a\neq 1$.

Решим уравнение $a^x=y$ относительно x. По определению логарифма $x=\log_a y$. Поменяв в этом равенстве местами x и y, получим логарифмическую функцию $y=\log_a x$. *Функцию* $y=\log_a x$ *называют обратной к функции* $y=a^x$. Если из равенства $y=\log_a x$ найти x, то получим $x=a^y$, а поменяв местами x и y — показательную функцию $y=a^x$. Функцию $y=a^x$ *называют обратной к функции* $y=\log_a x$. Поэтому функции $f(x)$ и $g(x)$ называют *взаимно обратными.*

Вообще если функция $y=f(x)$ задана формулой, то для нахождения обратной функции нужно решить уравнение $f(x)=y$ относительно x и затем поменять местами x и y.

Если уравнение $f(x)=y$ имеет более чем один корень, то функции, обратной к $y=f(x)$, не существует.

Например, функция $f(x)=x^2$ не имеет обратной, так как уравнение $x^2=y$ имеет два корня $x_{1,2}=\pm\sqrt{y}$ для любого $y>0$. Если функцию $y=x^2$ рассматривать только на промежутке $x\geqslant 0$, то она будет иметь обратную $y=\sqrt{x}$, так как уравнение $x^2=y$ при $y\geqslant 0$ имеет только один неотрицательный корень.

Задача 1. Найти функцию, обратную к функции $y=\frac{1}{x-2}$.

△ Решая это уравнение относительно x, получаем $x=2+\frac{1}{y}$.

Заменив x на y и y на x, находим $y=2+\frac{1}{x}$. ▲

В этой задаче область определения функции $y=\frac{1}{x-2}$ есть множество действительных чисел, не равных 2, а множество ее значений — все действительные числа, не равные 0. График этой функции изображен на рисунке 11.

Для обратной функции $y=2+\frac{1}{x}$ область определения — множество действительных чисел, не равных 0, а множество значений — все действительные числа, не равные 2. График обратной функции изображен на рисунке 12.

Вообще область определения обратной функции совпадает с множеством значений исходной функции, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения исходной функции.

Можно показать, что если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y=x$.

Примеры графиков взаимно обратных функций показаны на рисунке 13.

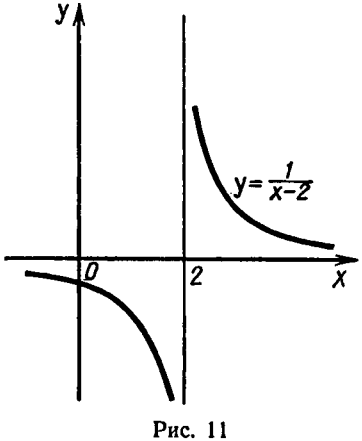


Рис. 11

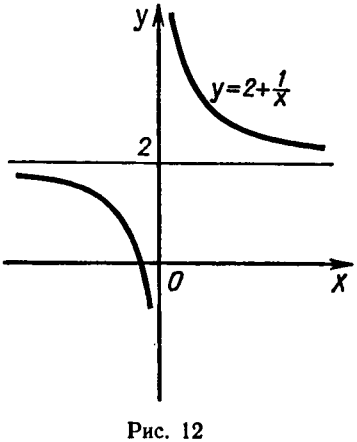


Рис. 12

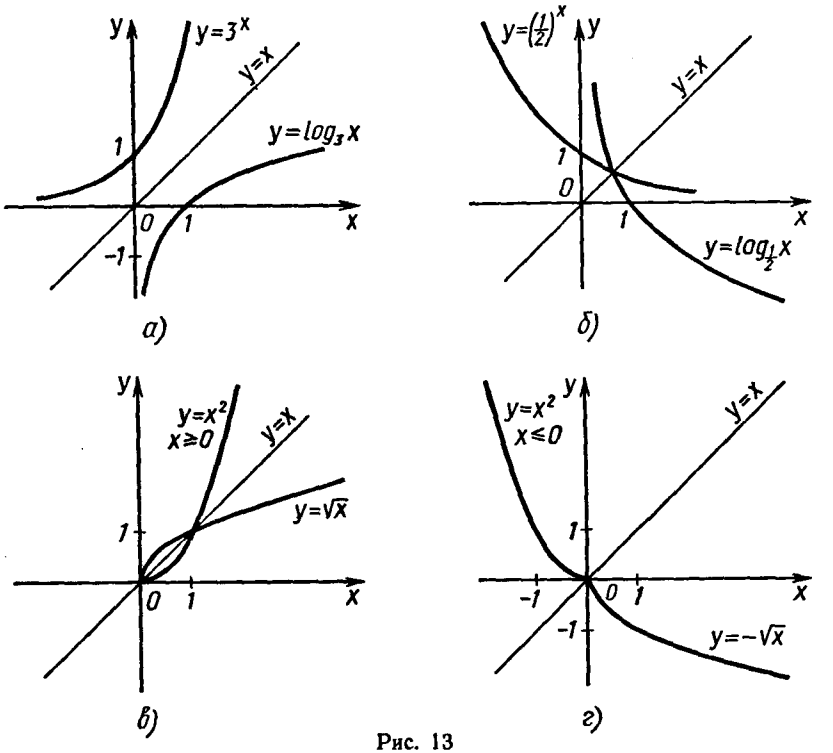


Рис. 13

Упражнения

108. Найти функцию, обратную к данной:

1) $y=2x-1$; 2) $y=-5x+4$; 3) $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$; 4) $y=\frac{3x-1}{2}$;

5) $y=x^3+1$; 6) $y=x^3-3$; 7) $y=3^x$; 8) $y=\log_{0,5} x$.

109. Найти область определения и множество значений функции, обратной к данной функции:

1) $y=-2x+1$; 2) $y=\frac{1}{4}x-7$; 3) $y=x^3-1$;

4) $y=(x-1)^3$; 5) $y=\frac{2}{x}$; 6) $y=\frac{3}{x-4}$.

110. На одном рисунке построить график данной функции и функции, обратной к данной:

1) $y=3x-1$; 2) $y=\frac{2x-1}{3}$;

3) $y=x^2-1$ при $x\geqslant 0$; 4) $y=(x-1)^2$ при $x\geqslant 1$.

§ 8. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Задача 1. Решить уравнение

$$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3. \qquad (1)$$

△ Предположим, что x — такое число, при котором равенство (1) является верным, т. е. x — корень уравнения (1).

Тогда по свойству логарифма верно равенство

$$\log_2(x+1)(x+3)=3. \qquad (2)$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем:

$$(x+1)(x+3)=8,$$

откуда $x^2+4x+3=8$, т. е. $x^2+4x-5=0$.

Последнее равенство верно, если $x_1=1$ или $x_2=-5$.

Итак, предположив, что число x — корень уравнения (1), мы показали, что x может быть равным или 1, или -5.

Проверим, являются ли эти числа корнями уравнения (1). Подставляя в левую часть данного уравнения $x=1$, получаем $\log_2(1+1)+\log_2(1+3)=\log_2 2+\log_2 4=1+2=3$, т. е. $x=1$ — корень уравнения (1).

При $x=-5$ числа $x+1$ и $x+3$ отрицательны, и поэтому левая часть уравнения (1) не имеет смысла, т. е. $x=-5$ не является корнем этого уравнения.

Ответ. $x=1$. ▲

Заметим, что $x=-5$ является корнем уравнения (2), так как $\log_2(-5+1)(-5+3)=\log_2 8=\log_2 2^3=3$. Получилось, что число $x=1$ является корнем обоих уравнений (1) и (2), а число $x=-5$ не является корнем уравнения (1), но является корнем уравнения (2). Таким образом, при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) корень $x=1$ сохранился и появился посторонний корень $x=-5$. В этом случае уравнение (2) называют *следствием уравнения* (1).

Если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется *следствием* первого *уравнения*.

Отметим, что в уравнении, которое является следствием данного, не всегда появляются посторонние корни; важно лишь то, чтобы корни исходного уравнения не терялись.

В большинстве случаев, как и в задаче 1, уравнения решаются постепенным переходом к более простым уравнениям, которые являются следствием исходного уравнения. В таких случаях после нахождения корней *необходима* их *проверка*.

Задача 2. Решить уравнение

$$\log_2(1-x)=3-\log_2(3-x).$$

△ Перенесем логарифм из правой части в левую:

$$\log_2(1-x)+\log_2(3-x)=3,$$

откуда

$$\log_2(1-x)(3-x)=3,$$
$$(1-x)(3-x)=8.$$

Решая это уравнение, получаем $x_1=5$, $x_2=-1$.

Число $x_1=5$ не является корнем исходного уравнения, так как при $x=5$ левая и правая части уравнения теряют смысл. Проверка показывает, что число $x=-1$ является корнем исходного уравнения.

Ответ. $x=-1$. ▲

Задача 3. Решить уравнение

$$\lg(2x^2-4x+12)=\lg x+\lg(x+3). \tag{3}$$

△ По свойству логарифмов

$$\lg(2x^2-4x+12)=\lg(x^2+3x), \tag{4}$$

откуда

$$2x^2-4x+12=x^2+3x, \tag{5}$$

$$x^2-7x+12=0, \tag{6}$$

$x_1=3$, $x_2=4$. Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x_1=3$, $x_2=4$. ▲

Проверкой можно убедиться в том, что числа $x_1=3$ и $x_2=4$ являются корнями не только уравнений (6) и (3), но и уравнений (4) и (5). Все эти уравнения других корней не имеют. Такие уравнения называют *равносильными*.

Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называют *равносильными*.

В частности, два уравнения, не имеющие корней, являются равносильными.

Отметим, что любое из двух равносильных уравнений является следствием другого.

Большинство уравнений, с которыми вы встречались в курсе алгебры, решались с помощью перехода от данного уравнения к равносильному. Так решались уравнения первой степени с одним неизвестным, квадратные уравнения, показательные уравнения.

Напомним, что уравнение заменяется ему равносильным при следующих преобразованиях:

любой член уравнения можно переносить из одной части в другую, изменив его знак на противоположный;

обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Однако не при любом преобразовании уравнение заменяется на равносильное. Например, при возведении обеих частей уравнения $\sqrt{x}=x-2$ в квадрат получается уравнение $x=(x-2)^2$, которое является следствием первого, но не равносильным ему. Поэтому после решения второго уравнения необходимо проверить, являются ли его корни корнями исходного уравнения.

Задача 4. Решить уравнение

$$\log_7(3x+4)=\log_7(5x+8).$$

△ Приравнивая выражения, стоящие под знаком логарифма, получаем:

$$3x+4=5x+8,$$

откуда $x=-2$. Выполняя проверку, убеждаемся, что при $x=-2$ левая и правая части исходного уравнения не имеют смысла.

Ответ. Корней нет.

Здесь посторонний корень появился потому, что при переходе от равенства логарифмов к равенству чисел не было учтено требование, чтобы эти числа были положительными.

Рассмотренные примеры логарифмических уравнений показывают, что при их решении с использованием свойств логарифмов получаются уравнения, которые являются следствиями исходного. Поэтому необходима проверка, которая позволяет обнаружить посторонние корни. ▲

Задача 5. Решить уравнение

$$\log_4(2x-1)\cdot\log_4 x=2\log_4(2x-1). \qquad (7)$$

△ Преобразуем данное уравнение:

$$\log_4(2x-1)\cdot\log_4 x-2\log_4(2x-1)=0,$$
$$\log_4(2x-1)\cdot(\log_4 x-2)=0.$$

Приравнивая каждый из множителей левой части уравнения к нулю, получаем:

1) $\log_4(2x-1)=0$, откуда $2x-1=1$, $x_1=1$;

2) $\log_4 x-2=0$, откуда $\log_4 x=2$, $x_2=16$.

Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x_1=1$, $x_2=16$. ▲

Отметим, что если обе части уравнения (7) разделить на выражение $\log_4(2x-1)$, то будет потерян корень $x=1$.

Вообще при *делении* обеих частей *уравнения на выражение, содержащее неизвестное, может произойти потеря корней.* Поэтому уравнение, обе части которого содержат общий множитель, решают переносом всех членов в одну часть и разложением на множители.

При решении уравнений главное не потерять корни, а наличие посторонних корней можно установить *проверкой.* Поэтому важно следить за тем, чтобы при преобразовании уравнения каждое следующее уравнение было следствием предыдущего.

Задача 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x-\log_2 y=1, \\ 4y^2+x-12=0. \end{cases}$$

△ Из первого уравнения выразим x через y: $\log_2\frac{x}{y}=\log_2 2$, $\frac{x}{y}=2$, $x=2y$. Подставив $x=2y$ во второе уравнение системы, получим $4y^2+2y-12=0$, откуда $y_1=\frac{3}{2}$, $y_2=-2$.

Найдем значения x: $x_1=3$, $x_2=-4$. Проверкой убеждаемся, что $\left(3;\ \frac{3}{2}\right)$ — решение системы, а $(-4;\ -2)$ — постороннее решение.

Ответ. $\left(3;\ \frac{3}{2}\right)$. ▲

Упражнения

111. Установить, какое из данных двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $x-3=0$ и $x^2-5x+6=0$;

2) $\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0$ и $x^2-3x+2=0$;

3) $\log_8 x+\log_8(x-2)=1$ и $\log_8 x(x-2)=1$;

4) $|x|=5$ и $\sqrt{x^2}=5$.

Решить уравнение **(112—116).**

112. 1) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$;

2) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2$;

3) $\lg(x+\sqrt{3})+\lg(x-\sqrt{3})=0$;

4) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=0$.

113. 1) $\lg(x-1)-\lg(2x-11)=\lg 2$;
2) $\lg(3x-1)-\lg(x+5)=\lg 5$;
3) $\log_7(2x^2-7x+6)-\log_7(x-2)=\log_7 x$;
4) $\log_3(x^3-x)-\log_3 x=\log_3 3$.

114. 1) $\frac{1}{2}\lg(x^2+x-5)=\lg 5x+\lg\frac{1}{5x}$;

2) $\frac{1}{2}\lg(x^2-4x-1)=\lg 8x-\lg 4x$.

115. 1) $\log_3(5x+3)=\log_3(7x+5)$;
2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(6x+8)$.

116. 1) $\log_7(x-1)\log_7 x=\log_7 x$;
2) $\log_{\frac{1}{3}} x\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)=\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)$;
3) $\log_2(3x+1)\log_3 x=2\log_2(3x+1)$;
4) $\log_{\sqrt{3}}(x-2)\log_5 x=2\log_3(x-2)$.

117. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}\lg x-\lg y=2,\\ x-10y=900;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2,\\ x^2y-2y+9=0.\end{cases}$

Решить уравнение **(118—120).**

118. 1) $\log_5 x^2=0$; 2) $\log_4 x^2=3$; 3) $\log_3 x^3=0$; 4) $\log_4 x^3=6$;
5) $\lg x^4+\lg 4x=2+\lg x^3$; 6) $\lg x+\lg x^2=\lg 9x$.

119. 1) $\log_4(x+2)(x+3)+\log_4\frac{x-2}{x+3}=2$;

2) $\log_2\frac{x-1}{x+4}+\log_2(x-1)(x+4)=2$;

3) $\log_3 x^2-\log_3\frac{x}{x+6}=3$; 4) $\log_2\frac{x+4}{x}+\log_2 x^2=5$.

120. 1) $2^{3\lg x}\cdot 5^{\lg x}=1600$; 2) $2^{\log_3 x^3}\cdot 5^{\log_3 x}=400$;

3) $\frac{1}{4+\lg x}+\frac{2}{2-\lg x}=1$; 4) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$.

121. Выяснить, равносильны ли уравнения:
1) $2x-7=4x+5$ и $2x+12=0$;

2) $\frac{1}{5}(2x-1)=1$ и $\frac{3x-1}{8}=1$;

3) $x^2-3x+2=0$ и $x^2+3x+2=0$;

4) $(x-2)^2=3(x-2)$ и $x-2=3$;

5) $|2x-1|=3$ и $2x-1=3$.

122. Не решая уравнений, выяснить, равносильны ли они:
1) $2x-1=4-1{,}5x$ и $3{,}5x-5=0$;
2) $x(x-1)=2x+5$ и $x^2-3x-5=0$;
3) $2^{3x+1}=2^{-3}$ и $3x+1=-3$;
4) $\log_3(x-1)=2$ и $x-1=9$.

123. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \lg x-\lg y=7, \\ \lg x+\lg y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x+\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{y}=4, \\ xy=2. \end{cases}$

Решить уравнение **(124—126).**

124*. 1) $\log_2 x-2\log_x 2=-1$; 2) $\log_2 x+\log_x 2=2{,}5$;
3) $\log_3 x+2\log_x 3=3$; 4) $\log_3 x-6\log_x 3=1$.

125.** 1) $\log_{x^2} 9+\log_{\sqrt{x}} 4=2$; 2) $\log_{x^2} 16-\log_{\sqrt{x}} 7=2$.

126.** 1) $\lg(6\cdot 5^x-25\cdot 20^x)-\lg 25=x$;
2) $\lg(2^x+x+4)=x-x\lg 5$.

§ 9. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При изучении логарифмической функции рассматривались неравенства вида $\log_a x<b$ и $\log_a x\geqslant b$. Приведем примеры решения более сложных логарифмических неравенств. Обычный способ решения таких неравенств заключается в переходе от них к более простому неравенству или системе неравенств, имеющей то же самое множество решений.

Задача 1. Решить неравенство

$$\lg(x+1)\leqslant 2. \qquad (1)$$

△ Правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях x, а левая часть — при $x+1>0$, т. е. при $x>-1$. Промежуток $x>-1$ называют *областью определения неравенства* (1). Так как логарифмическая функция с основанием 10 возрастающая, то неравенство (1) при условии $x+1>0$ выполняется, если $x+1\leqslant 100$ (так как $2=\lg 100$). Таким образом, неравенство (1) *равносильно системе неравенств*

$$\begin{cases} x>-1, \\ x+1\leqslant 100, \end{cases} \qquad (2)$$

т. е. неравенство (1) и система (2) имеют одно и то же множество решений. Решая систему (2), находим $-1<x\leqslant 99$. ▲

Задача 2. Решить неравенство

$$\log_2(x-3)+\log_2(x-2)\leqslant 1. \qquad (3)$$

△ Логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, поэтому левая часть неравенства имеет смысл при $x-3>0$ и $x-2>0$.

Следовательно, областью определения этого неравенства является промежуток $x>3$. По свойствам логарифма неравенство (3) при $x>3$ равносильно неравенству

$$\log_2(x-3)(x-2)\leqslant \log_2 2. \qquad (4)$$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая. Поэтому при $x>3$ неравенство (4) выполняется, если $(x-3)(x-2)\leqslant 2$.

Таким образом, исходное неравенство (3) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}(x-3)(x-2)\leqslant 2,\\ x>3.\end{cases}$$

Решая первое неравенство этой системы, получаем $x^2-5x+4\leqslant 0$, откуда $1\leqslant x\leqslant 4$. Совмещая этот отрезок с промежутком $x>3$, получаем $3<x\leqslant 4$ (рис. 14). ▲

Задача 3*. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8)\geqslant -4. \qquad (5)$$

△ Область определения неравенства находится из условия

$$x^2+2x-8>0.$$

Неравенство (5) можно записать в следующем виде:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8)\geqslant \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

Так как логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{2}$ является убывающей, то для всех x из области определения неравенства получаем:

$$x^2+2x-8\leqslant 16.$$

Таким образом, исходное неравенство (5) равносильно системе неравенств $\begin{cases}x^2+2x-8>0,\\ x^2+2x-8\leqslant 16,\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2+2x-8>0,\\ x^2+2x-24\leqslant 0.\end{cases}$

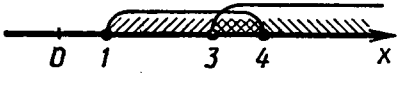


Рис. 14

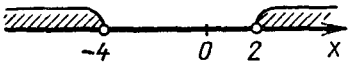


Рис. 15

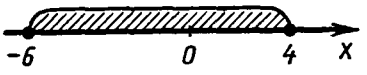


Рис. 16

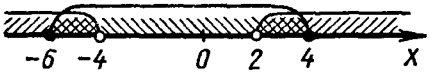


Рис. 17

Решая первое квадратное неравенство, получаем $x<-4$, $x>2$ (рис. 15). Решая второе квадратное неравенство, получаем $-6\leqslant x\leqslant 4$ (рис. 16). Следовательно, оба неравенства системы выполняются одновременно при $-6\leqslant x<-4$ и при $2<x\leqslant 4$ (рис. 17).

Ответ. $-6\leqslant x<-4$, $2<x\leqslant 4$. ▲

Упражнения

127. Найти область определения функции:

1) $y=\lg(3x-2)$; 2) $y=\log_2(7-5x)$;
3) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2)$; 4) $y=\log_7(4-x^2)$.

Решить неравенство **(128—130).**

128. 1) $\log_3(x+2)<3$; 2) $\log_8(4-2x)\geqslant 2$;
3) $\log_3(x+1)<-2$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\geqslant -2$;
5) $\log_{\frac{1}{5}}(4-3x)\geqslant -1$; 6) $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x)<-2$.

129. 1) $\lg x>\lg 8+1$; 2) $\lg x>2-\lg 4$;
3) $\log_2(x-4)<1$; 4) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5)>\log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.

130. 1) $\log_{15}(x-3)+\log_{15}(x-5)<1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)+\log_{\frac{1}{3}}(12-x)\geqslant -2$.

---

131. Найти область определения функции:

1) $y=\log_5(x^2-4x+3)$; 2) $y=\log_6\frac{3x+2}{1-x}$.

Решить неравенство **(132—137).**

132. 1) $\log_5\frac{3x-2}{x^2+1}>0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x^2+3}{x-7}<0$;
3) $\lg(3x-4)<\lg(2x+1)$;
4) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

133. 1) $\log_8(x^2-4x+3)<1$; 2) $\log_6(x^2-3x+2)\geqslant 1$;
3) $\log_3(x^2+2x)>1$; 4) $\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2{,}5x)<-1$.

134. 1) $\lg(x^2-8x+13)>0$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)<0$;
3) $\log_2(x^2+2x)<3$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6)\geqslant -3$.

135. 1) $\log_{0,2} x-\log_5(x-2)<\log_{0,2} 3$;
2) $\lg x-\log_{0,1}(x-1)>\log_{0,1} 0{,}5$.

136. 1) $\log^2_{0,2} x-5\log_{0,2} x<-6$;
2) $\log^2_{0,1} x+3\log_{0,1} x>4$.

137*. 1) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}<1$;
2) $\log_3(2-3^{-x})<x+1-\log_3 4$;
3) $\log_{x^2-3}(4x+7)>0$;
4) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}(\sqrt{6}-2x)<0$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

Вычислить **(138—142).**

138. 1) $\log_{15} 225$; 2) $\log_4 256$;
3) $\log_3 \frac{1}{243}$; 4) $\log_7 \frac{1}{343}$.

139. 1) $\log_{\frac{1}{4}} 64$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 81$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$.

140. 1) $\log_{11} 1$; 2) $\log_7 7$; 3) $\log_{16} 64$; 4) $\log_{27} 9$.

141. 1) $(0{,}1)^{-\lg 0{,}3}$; 2) $10^{-\lg 4}$;
3) $5^{-\log_5 3}$; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_6 4}$.

142. 1) $4\log_{\frac{1}{2}} 3-\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27-2\log_{\frac{1}{2}} 6$;
2) $\frac{2}{3}\lg 0{,}001+\lg\sqrt[3]{1000}-\frac{3}{5}\lg\sqrt{10\,000}$.

143. Вычислить с помощью микрокалькулятора:
1) $\log_8 7$; 2) $\log_3 12$; 3) $\log_{1,3} 0{,}17$; 4) $\log_{0,3} 8{,}1$.

144. Построить график функции:
1) $y=\log_4 x$; 2) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$.

Какая из данных функций является возрастающей? убывающей? При каких значениях x каждая функция принимает положительные значения? отрицательные значения? значения, равные нулю?

145. Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:
1) $y=\log_{0,2} x$; 2) $y=\log_{\sqrt{5}} x$; 3) $y=\log_{\frac{1}{e}} x$; 4) $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$.

146. Решить графически уравнение:
1) $\log_3 x=5-x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x=3x$.

147. Найти область определения функции:
1) $y=\log_7(5-2x)$; 2) $y=\log_2(x^2-2x)$.

Решить уравнение **(148—150).**

148. 1) $\log_3(3x-1)=2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(7-8x)=-2$;
3) $2\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-x)$; 4) $\lg(x^2-2)=\lg x$.

149. 1) $\lg(x^2-2x)=\lg 30-1$;
2) $\log_3(2x^2+x)=\log_3 6-\log_3 2$;
3) $\lg^2 x-3\lg x=4$;
4) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6=0$.

150. 1) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$;
2) $\log_3(5-x)+\log_3(-1-x)=3$;
3) $\lg(x-2)+\lg x=\lg 3$;
4) $\log_{\sqrt{6}}(x-1)+\log_{\sqrt{6}}(x+4)=\log_{\sqrt{6}} 6$.

Решить неравенство **(151—153).**

151. 1) $\log_2(x-5)\leqslant 2$;
2) $\log_3(7-x)>1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)>-2$;
4) $\log_{\frac{1}{2}}(3-5x)<-3$.

152. 1) $\log_3(5-4x)<\log_3(x-1)$;
2) $\log_{0,3}(2x+5)\geqslant\log_{0,3}(x+1)$.

153. 1) $\lg(x^2+2x+2)<1$;
2) $\log_3(x^2+7x-5)>1$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Вычислить: $\log_5 125$; $\lg 0{,}01$; $2^{\log_2 3}$; $3^{2\log_3 7}$; $\log_2 68 - \log_2 17$.

2. Построить схематически график функции:

$$y = \log_{0,2} x;\ y = \log_2 x.$$

3. Сравнить числа:

$$\log_{0,2} 3 \text{ и } \log_{0,2} 2{,}5;\ \log_2 0{,}7 \text{ и } \log_2 1{,}2.$$

4. Решить уравнение:

$$\log_5 (3x+1) = 2;$$
$$\log_3 (x+2) + \log_3 x = 1;$$
$$\ln (x^2 - 6x + 9) = \ln 3 + \ln (x+3).$$

5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \ln x - \ln y = \ln 3, \\ x - 2y = 5. \end{cases}$$

6. Решить неравенство:

$$\log_3 (x-1) \leqslant 2;\ \log_{\frac{1}{5}} (2-x) > -1.$$

---

154. Вычислить:

1) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$; 2) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25\sqrt[4]{5}}$; 3) $2^{2-\log_2 5}$;

4) $3{,}6^{\log_{3,6} 10 + 1}$; 5) $2\log_5 \sqrt{5} + 3\log_2 8$;

6) $\log_2 \log_2 \log_2 2^{16}$.

155. При каких значениях x справедливо неравенство:

1) $\log_x 8 < \log_x 10$; 2) $\log_x \frac{3}{4} < \log_x \frac{1}{2}$?

156. Решить графически уравнение:

1) $\log_3 x = \frac{3}{x}$; 2) $2^x = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Решить уравнение (157—162).

157. 1) $3^{4x}=10$; 2) $2^{3x}=3$; 3) $1{,}3^{3x-2}=3$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5+4x}=1{,}5$; 5) $16^x-4^{x+1}-14=0$;

6) $25^x+2\cdot 5^x-15=0$.

158. 1) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\frac{11}{12}$;

2) $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x=6$;

3) $\log_3 x\cdot\log_2 x=4\log_3 2$;

4) $\log_5 x\cdot\log_3 x=9\log_5 3$.

159. 1) $\log_3(2-x^2)-\log_3(-x)=0$;

2) $\log_5(x^2-12)-\log_5(-x)=0$;

3) $\log_2\sqrt{x-3}+\log_2\sqrt{3x-7}=2$;

4) $\lg(x+6)-\lg\sqrt{2x-3}=\lg 4$.

160. 1) $\log_{\sqrt{2}} x+4\log_4 x+\log_8 x=13$;

2) $\log_{0,5}(x+2)-\log_2(x-3)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4x-8)$.

161. 1) $\log_{\frac{1}{x}} 5+\log_{\frac{1}{x^2}} 12+\frac{1}{2}\log_x 3=1$;

2) $\frac{1}{2}\log_x 7-\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} 3-\log_{x^2} 28=1$.

162. 1) $\log_2\frac{2}{x-1}=\log_2 x$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{10}{7-x}=\log_{\frac{1}{2}} x$;

3) $\lg\frac{x+8}{x-1}=\lg x$; 4) $\lg\frac{x-4}{x-2}=\lg x$.

163. Решить неравенство:

1) $\log_{\sqrt{6}}(x-4)+\log_{\sqrt{6}}(x+1)\leqslant 2$;

2) $\log_{3\sqrt{2}}(x-5)+\log_{3\sqrt{2}}(x+12)\leqslant 2$;

3) $\log_3(8x^2+x)>2+\log_3 x^2+\log_3 x$;

4) $\log_2 x+\log_2(x-3)>\log_2 4$;

5) $\log_{\frac{1}{5}}(x-10)-\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\geqslant -1$;

6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+10)+\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+4)>-2$.

164*. Доказать, что если последовательность положительных чисел является геометрической прогрессией, то их логарифмы по одному основанию образуют арифметическую прогрессию.

165*. Найти три последовательных члена геометрической прогрессии, если их сумма равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3.

166*. Построить график функции:

1) $y=\frac{1}{\log_2 x}$; 2) $y=\frac{1}{\ln x}$.

Решить уравнение **(167—169).**

167.** 1) $x^{\lg 9}+9^{\lg x}=6$; 2) $x^{3\lg^3 x-\frac{2}{3}\lg x}=100\sqrt[3]{10}$.

168.** 1) $3+2\log_{x+1}3=2\log_3(x+1)$;

2) $1+2\log_{x+2}5=\log_5(x+2)$.

169.** 1) $\log_2(2^x-5)-\log_2(2^x-2)=2-x$;

2) $\log_{1-x}(3-x)=\log_{3-x}(1-x)$.

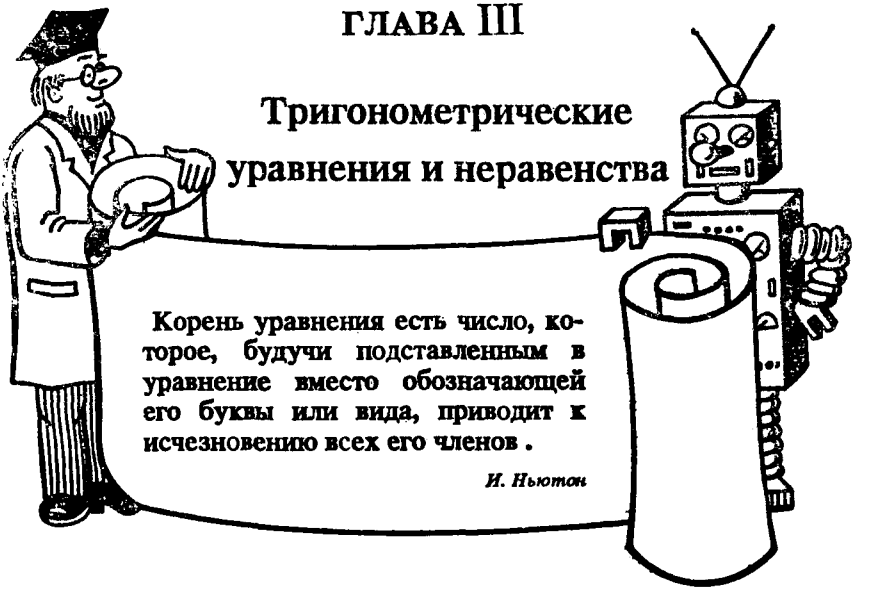
170.** Решить неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(2^{x+2}-4^x)\geqslant -2$;

2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2$.

ГЛАВА III

Тригонометрические уравнения и неравенства



Корень уравнения есть число, которое, будучи подставленным в уравнение вместо обозначающей его буквы или вида, приводит к исчезновению всех его членов.

И. Ньютон

§ 10. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ (ПОВТОРЕНИЕ)

В курсе алгебры рассматривались *синус, косинус и тангенс произвольного угла*, выраженного в градусах или радианах. Там же были доказаны основные формулы, которые использовались для преобразований тригонометрических выражений. Напомним эти формулы.

1. Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \qquad (1)$$

2. Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1. \qquad (2)$$

Ньютон Исаак (1643—1727) — английский математик, физик, механик, астроном; основоположник современной механики; одновременно с немецким математиком Г. Лейбницем ему принадлежит разработка дифференциального и интегрального исчислений.

3. Формулы сложения:

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\\
&\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,\\
&\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\\
&\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned} \tag{3}$$

4. Формулы синуса и косинуса двойного угла:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \tag{4}$$

5. Формулы приведения.

Для синуса:

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\\
&\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\ \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\\
&\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha.
\end{aligned} \tag{5}$$

Для косинуса:

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\\
&\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\\
&\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для тангенса и котангенса:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha,\\
&\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha.
\end{aligned} \tag{7}$$

Формулы приведения запоминать необязательно. Для того чтобы записать любую из них, можно руководствоваться следующими *правилами*:

1) В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2) Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс — на котангенс и наоборот. Если угол равен $\pi\pm\alpha$, то замены не происходит.

Например, покажем, как с помощью этих правил можно получить формулу приведения для $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. По первому правилу в правой части формулы нужно поставить знак «—», так как если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\alpha<\pi$, а косинус во второй четверти отрицателен. По второму правилу косинус нужно заменить на синус, следовательно, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

6. Формулы синуса, косинуса, тангенса угла $(-\alpha)$:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha,\ \operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha. \qquad (8)$$

7. Формулы синуса и косинуса угла $\alpha+2\pi n$, тангенса угла $\alpha+\pi n$, $n\in Z$:

$$\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha,\ \cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha,\quad \operatorname{tg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{tg}\alpha,\ n\in Z. \qquad (9)$$

Приведем несколько примеров применения формул (1)—(9).

Задача 1. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}8$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

△ Сначала найдем $\cos\alpha$. Из формулы (1) $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-(-0{,}8)^2=0{,}36$. Так как в третьей четверти $\cos\alpha<0$, то $\cos\alpha=-0{,}6$. По формулам (2) находим $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-0{,}8}{-0{,}6}=\frac{4}{3}$. ▲

Задача 2. Упростить выражение

$$\frac{\sin 3\alpha \cos \alpha + \cos 3\alpha \sin \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1}.$$

△ Используя формулы (1), (3) и (4), получаем:

$$\frac{\sin 3\alpha \cos \alpha + \cos 3\alpha \sin \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1} = \frac{\sin (3\alpha + \alpha)}{2\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} =$$
$$= \frac{\sin 4\alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2 \sin 2\alpha. \blacktriangle$$

Задача 3. Вычислить $\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$.

△ Используя формулы (8) и (9), получаем:

$$\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right) = -\sin\frac{41\pi}{6} = -\sin\left(6\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6}.$$

По формулам приведения находим:

$$-\sin\frac{5\pi}{6} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. ▲

Упражнения

171. Выразить в радианной мере углы 60°; 45°; 120°; 135°; 270°; 720°.

172. Выразить в градусной мере углы $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{7\pi}{2}$; 3π; $\frac{11}{4}\pi$.

173. Изобразить на единичной окружности точки, полученные поворотом P (1; 0) на угол α, если:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos\alpha = 1$;

4) $\cos\alpha = 0$; 5) $\sin\alpha = -1$; 6) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$.

174. Вычислить:

1) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$;

2) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

175. Вычислить $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

$\cos\beta=\frac{5}{13}$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

176. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Вычислить **(177—178).**

177. 1) $\sin 405°-\cos 315°$; 2) $\cos 690°-\sin 780°$;

3) $\sin\frac{11}{6}\pi+\cos\frac{5}{3}\pi$; 4) $\cos\frac{7}{4}\pi+\sin\frac{7}{4}\pi$.

178. 1) $\sin\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$; 2) $\cos\frac{5}{4}\pi$; 3) $\operatorname{tg}\frac{11}{3}\pi$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{7}{4}\pi$; 5) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$; 6) $\sin\frac{19}{4}\pi$.

Упростить выражение **(179—180).**

179. 1) $\dfrac{\sin(-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)}{1+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\alpha)}$; 2) $\dfrac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\sin(2\pi+\alpha)}{2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha)+1}$.

180. 1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha-1}$; 4) $\dfrac{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha-1}$;

5) $\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$; 6) $\dfrac{\cos^2 2\alpha}{1+\cos 4\alpha}$.

181. Доказать тождество:

1) $\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

2) $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

3) $\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\sin 2\alpha=2\cos(\alpha-\beta)$;

4) $\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)\cdot\sin 2\beta=-2\sin(\alpha-\beta)$.

---

182. Синус острого угла равен $\frac{15}{17}$. Найти косинус смежного с ним угла.

183. Косинус угла треугольника равен $\frac{9}{41}$. Найти синус угла, смежного с данным, при той же вершине треугольника.

184. Доказать тождество:

1) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=\cos^2\alpha$;

2) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$;

3) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

4) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha+1}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

185.** Вычислить:

1) $\sin 575^\circ\cdot\cos 845^\circ-\cos 1405^\circ\cdot\sin 1675^\circ-\operatorname{tg}215^\circ\cdot\operatorname{tg}685^\circ-$
$-\operatorname{tg}^2 35^\circ$;

2) $\sin\frac{8\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}+\cos\frac{29\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{\cos\frac{23\pi}{3}\cdot\sin\frac{11\pi}{6}}+7$;

3) $4\sin 18^\circ\cdot\sin 306^\circ$;

4) $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}$.

186. Упростить:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

2) $\frac{\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

187. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\frac{\sin\left(\frac{19\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(7\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(\alpha-\pi)}$ при $\alpha=\frac{5}{6}\pi$;

2) $\frac{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)-\operatorname{tg}(4\pi-\beta)}{1+\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)\operatorname{tg}\beta}$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{12}$.

188. Упростить выражение:

1) $\frac{\cos\alpha-2\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{2-\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$;

2) $\frac{2\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos(-\alpha)+\sin\alpha}-\frac{2-3\sin^2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}$.

189*. Доказать тождество:

1) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$;

2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$;

3) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$;

4) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

190.** Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, то

$$\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta.$$

191.** Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

192.** Доказать тождество:

1) $\sin\alpha\cdot\sin(\beta-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)=\sin^2\frac{\beta}{2}$;

2) $\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos^2\alpha\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

193*. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$;

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)}$.

§ 11. СУММА И РАЗНОСТЬ СИНУСОВ. СУММА И РАЗНОСТЬ КОСИНУСОВ

Задача 1. Упростить выражение

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

△ Используя формулу сложения и формулу синуса двойного угла, получаем:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=\left(\sin\alpha\sin\frac{\pi}{12}=\right.$$

$$\left.+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha.\ \blacktriangle$$

Эту задачу можно решить проще, если использовать *формулу суммы синусов*:

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.} \qquad (1)$$

С помощью этой формулы получаем:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Докажем теперь справедливость формулы (1).

○ Обозначим $\frac{\alpha+\beta}{2}=x$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=y$. Тогда $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$, и поэтому $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y=$

$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. ●

Наряду с формулой (1) используются *формула разности синусов*, а также *формулы суммы и разности косинусов*:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) доказываются так же, как и формула (1); формула (2) получается из формулы (1) заменой β на $-\beta$ (*докажите самостоятельно*).

Задача 2. Вычислить $\sin 75°+\cos 75°$.

△ $\sin 75°+\cos 75°=\sin 75°+\sin 15°=$

$=2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2}=2\sin 45°\cos 30°=$

$=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. ▲

З а д а ч а 3. Преобразовать в произведение

$$2\sin\alpha+\sqrt{3}.$$

$\triangle$ $2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$

$$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right). \blacktriangle$$

З а д а ч а 4*. Доказать, что наименьшее значение выражения $\sin\alpha+\cos\alpha$ равно $-\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}$.

$\triangle$ Преобразуем данное выражение в произведение:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Так как наименьшее значение косинуса равно -1, а наибольшее равно 1, то наименьшее значение данного выражения равно $\sqrt{2}\cdot(-1)=-\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$. $\blacktriangle$

Упражнения

194. Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$;

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

4) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

195. Вычислить:

1) $\cos 105^\circ+\cos 75^\circ$;
2) $\sin 105^\circ-\sin 75^\circ$;
3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$;
4) $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$;
5) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$;
6) $\sin 105^\circ+\sin 165^\circ$.

196. Преобразовать в произведение:

1) $1+2\sin\alpha$;
2) $1-2\sin\alpha$;
3) $1+2\cos\alpha$;
4) $1+\sin\alpha$.

197. Доказать тождество:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha$; 2) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

---

198. Упростить выражение:

1) $\frac{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$;

2) $\frac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

Доказать тождество **(199—200).**

199. 1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=0$.

200. 1) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha$;

2) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

201. Записать в виде произведения:

1) $\cos 22°+\cos 24°+\cos 26°+\cos 28°$;

2) $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{6}$.

202*. Доказать тождество $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ и вычислить:

1) $\operatorname{tg} 267°+\operatorname{tg} 93°$;

2) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$.

203.** Разложить на множители:

1) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$;

2) $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha$;

3) $1+\sin\alpha-\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha$;

4) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$.

§ 12. УРАВНЕНИЕ $\cos x = a$

Из курса алгебры известно, что значения косинуса заключены в промежутке $[-1; 1]$, т. е. $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$. Поэтому если $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\cos x = -1{,}5$ не имеет корней.

Задача 1. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

△ Напомним, что $\cos x$ — абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки P (1; 0) вокруг начала координат на угол x. Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 18). Так как $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, то точка M_1 получается из точки P (1; 0) поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается из точки P (1; 0) поворотом на угол $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Итак, все корни уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Вместо этих двух формул обычно пользуются одной:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \; k \in Z. \; \blacktriangle$$

Задача 2. Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

△ Абсциссу, равную $-\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 19). Так как $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$, то угол $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, а пото-

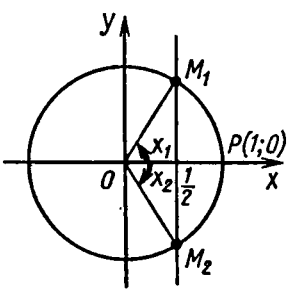


Рис. 18

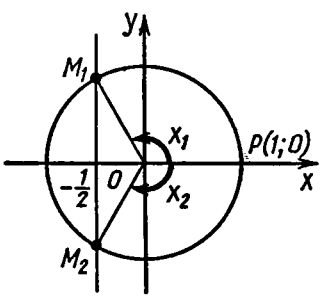


Рис. 19

му угол $x_2=-\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, все корни уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$ можно найти по формуле $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. ▲

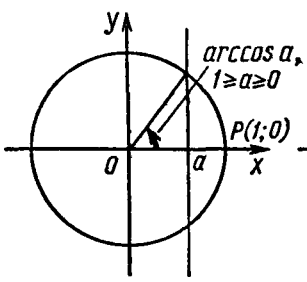
Таким образом, каждое из уравнений $\cos x=\frac{1}{2}$ и $\cos x=-\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней. На отрезке $0\leqslant x\leqslant\pi$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1=\frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x=\frac{1}{2}$ и $x_1=\frac{2\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют *арккосинусом числа* $\frac{1}{2}$ и записывают: $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, а число $\frac{2\pi}{3}$ — *арккосинусом числа* $\left(-\frac{1}{2}\right)$ и записывают: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

Вообще уравнение $\cos x=a$, где $-1\leqslant a\leqslant 1$, имеет на отрезке $0\leqslant x\leqslant\pi$ только один корень. Если $a\geqslant 0$, то корень заключен в промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; если $a<0$, то в промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$. Этот корень называют *арккосинусом числа* a *и обозначают* $\arccos a$ (рис. 20).

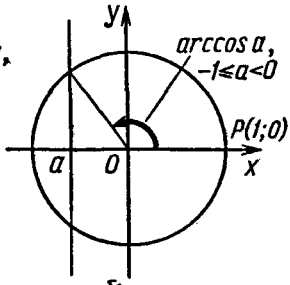
Таким образом, *арккосинусом числа* $a\in[-1;1]$ называется такое число $\alpha\in[0;\pi]$, косинус которого равен a:

$$\arccos a=\alpha, \text{ если } \cos\alpha=a \text{ и } 0\leqslant\alpha\leqslant\pi. \qquad (1)$$

Например, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, так как $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0\leqslant\frac{\pi}{6}\leqslant\pi$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$, так как $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0\leqslant\frac{5\pi}{6}\leqslant\pi$.



а)



б)

Рис. 20

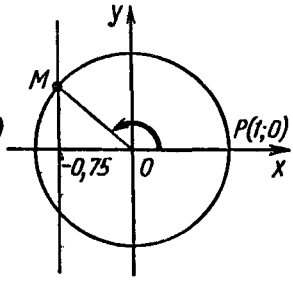


Рис. 21

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что *все корни уравнения* $\cos x = a$, где $|a| \leqslant 1$, выражаются формулой

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z. \qquad (2)$$

Задача 3. Решить уравнение $\cos x = -0{,}75$.

△ По формуле (2) находим

$$x = \pm \arccos(-0{,}75) + 2\pi n,\ n \in Z. \blacktriangle$$

Значение $\arccos(-0{,}75)$ можно приближенно найти на рисунке 21, измеряя угол POM транспортиром.

Приближенные значения арккосинуса можно также *находить с помощью специальных таблиц или микрокалькулятора.* Например, значение $\arccos(-0{,}75)$ можно вычислить на микрокалькуляторе МК-54 по программе

0,75 [/—/] [F] [$\cos^{-1}$] 2,4188583.

Итак, $\arccos(-0{,}75) \approx 2{,}42$.

В данном случае переключатель микрокалькулятора Р-ГРД-Г был установлен в положение Р (радиан).

Если вычисления проводить в градусной мере, то переключатель микрокалькулятора Р-ГРД-Г следует установить в положение Г (градус). Программа вычислений остается прежней:

0,75 [/—/] [F] [$\cos^{-1}$] 138,59038.

Итак, $\arccos(-0{,}75) \approx 139°$.

Задача 4*. Решить уравнение $(4\cos x - 1)(2\cos 2x + 1) = 0$.

△ 1) $4\cos x - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1}{4}$, $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

2) $2\cos 2x + 1 = 0$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ. $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$. ▲

Можно доказать, что *для любого* $a \in [-1; 1]$ *справедлива формула*

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \qquad (3)$$

Эта формула позволяет выражать значения арккосинусов отрицательных чисел через значения арккосинусов положительных чисел. Например:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Из формулы (2) следует, что корни уравнения $\cos x=a$ при $a=0$, $a=1$, $a=-1$ можно находить по более простым формулам:

$\cos x=0$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$	(4)
$\cos x=1$	$x=2\pi n,\ n\in Z$	(5)
$\cos x=-1$	$x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$	(6)

Задача 5. Решить уравнение $\cos\frac{x}{3}=-1$.

△ По формуле (6) получаем $\frac{x}{3}=\pi+2\pi n$, $n\in Z$, откуда $x=3\pi+6\pi n$, $n\in Z$. ▲

Упражнения

Вычислить **(204—205)**.

204. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\arccos\frac{1}{2}$; 5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

205. 1) $2\arccos 0+3\arccos 1$; 2) $3\arccos(-1)-2\arccos 0$;

3) $12\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

206. Сравнить числа:

1) $\arccos\frac{1}{3}$ и $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arccos(-1)$.

Решить уравнение **(207—210)**.

207. 1) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x=\frac{1}{2}$;

3) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

208. 1) $\cos x=\frac{1}{3}$; 2) $\cos x=\frac{3}{4}$;
3) $\cos x=-0{,}3$; 4) $\cos x=-0{,}2$.

209. 1) $\cos 4x=1$; 2) $\cos 2x=-1$; 3) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{4}=-1$;
4) $2\cos\frac{x}{3}=\sqrt{3}$; 5) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$; 6) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

---

210. 1) $\cos x\cdot\cos 3x=\sin 3x\cdot\sin x$;
2) $\cos 2x\cdot\cos x+\sin 2x\cdot\sin x=0$.

211. Выяснить, имеет ли смысл выражение:
1) $\arccos(\sqrt{6}-3)$; 2) $\arccos(\sqrt{7}-2)$;
3) $\arccos(2-\sqrt{10})$; 4) $\arccos(1-\sqrt{5})$;
5) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$.

Решить уравнение **(212—213)**.

212. 1) $\cos^2 2x=1+\sin^2 2x$; 2) $4\cos^2 x=3$;
3) $2\cos^2 x=1+2\sin^2 x$; 4) $2\sqrt{2}\cos^2 x=1+\sqrt{2}$.

213. 1) $(1+\cos x)(3-2\cos x)=0$;
2) $(1-\cos x)(4+3\cos 2x)=0$;
3) $(1+2\cos x)(1-3\cos x)=0$;
4) $(1-2\cos x)(2+3\cos x)=0$.

214*. Решить уравнение:
1) $\arccos(2x-3)=\frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos\frac{x+1}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

215.** Доказать, что при всех значениях a, таких, что $-1\leqslant a\leqslant 1$, выполняется равенство $\cos(\arccos a)=a$. Вычислить:
1) $\cos(\arccos 0{,}2)$; 2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$;
3) $\cos\left(\pi+\arccos\frac{3}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{1}{3}\right)$;
5) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

216.** Доказать, что $\arccos(\cos\alpha)=\alpha$ при $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$. Вычислить:
1) $5\arccos\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)$; 2) $3\arccos(\cos 2)$;
3) $\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right)$; 4) $\arccos(\cos 4)$.

217*. С помощью микрокалькулятора решить уравнение:
1) $\cos x=0{,}35$; 2) $\cos x=-0{,}27$.

§ 13. УРАВНЕНИЕ $\sin x = a$

Известно, что значения синуса заключены в промежутке $[-1; 1]$, т. е. $-1 \leqslant \sin \alpha \leqslant 1$. Поэтому если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\sin x = 2$ не имеет корней.

Задача 1. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

△ Напомним, что $\sin x$ — ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x. Ординату, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 22). Так как $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, то точка M_1 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.Точка M_2 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, т. е. на углы $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Итак, все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \; x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \; k \in Z.$$

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \; n \in Z. \qquad (1)$$

В самом деле, если n — четное число, т. е. $n = 2k$, то из формулы (1) получаем $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, а если n — нечетное число, т. е. $n = 2k + 1$, то из формулы (1) получаем $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

Ответ. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \; n \in Z$. ▲

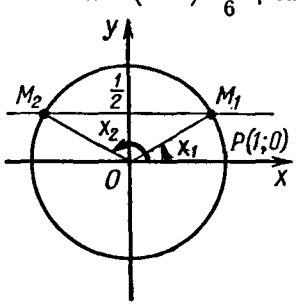


Рис. 22

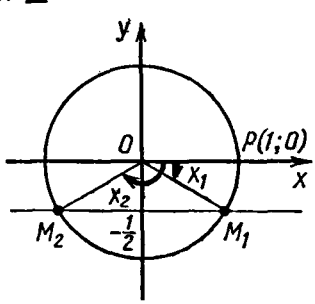


Рис. 23

Задача 2. Решить уравнение $\sin x=-\frac{1}{2}$.

△ Ординату, равную $-\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 (рис. 23), где $x_1=-\frac{\pi}{6}$, $x_2=-\frac{5\pi}{6}$. Следовательно, все корни уравнения $\sin x=-\frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

Эти формулы объединяются в одну:

$$x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n,\ n\in Z. \qquad (2)$$

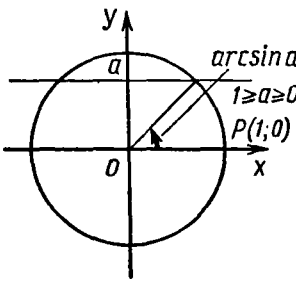
В самом деле, если $n=2k$, то по формуле (2) получаем $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, а если $n=2k-1$, то по формуле (2) находим $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. Ответ. $x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n,\ n\in Z$. ▲

Итак, каждое из уравнений $\sin x=\frac{1}{2}$ и $\sin x=-\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней. На отрезке $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1=\frac{\pi}{6}$ — корень уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ и $x_1=-\frac{\pi}{6}$ — корень уравнения $\sin x=-\frac{1}{2}$. Число $\frac{\pi}{6}$ называют *арксинусом числа* $\frac{1}{2}$ и записывают: $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$; число $-\frac{\pi}{6}$ называют арксинусом числа $-\frac{1}{2}$ и пишут: $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

Вообще уравнение $\sin x=a$, где $-1\leqslant a\leqslant 1$, на отрезке $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ имеет только один корень. Если $a\geqslant 0$, то корень заключен в промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; если $a<0$, то в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$. Этот корень называют *арксинусом числа* a *и обозначают* $\arcsin a$ (рис. 24).

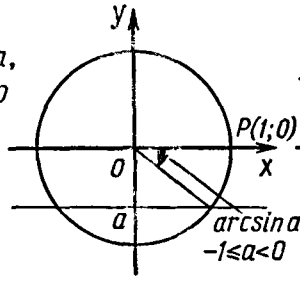
Таким образом, *арксинусом числа* $a\in[-1;\ 1]$ называется такое число $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

$$\arcsin a=\alpha,\ \text{если}\ \sin\alpha=a\ \text{и}\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$



а)

Рис. 24



б)

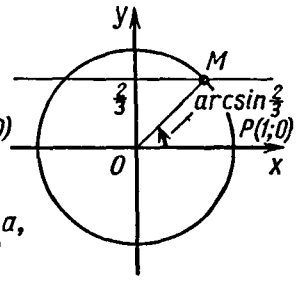


Рис. 25

Например, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, так как $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$, так как $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, *что корни уравнения* $\sin x=a$, где $|a|\leqslant 1$, выражаются формулой

$$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in Z. \qquad (4)$$

З а д а ч а 3. Решить уравнение $\sin x=\frac{2}{3}$.

△ По формуле (4) находим $x=(-1)^n\arcsin\frac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z$. ▲

Значение $\arcsin\frac{2}{3}$ можно приближенно найти из рисунка 25, измеряя угол *POM* транспортиром.

Значения арксинуса можно находить с помощью специальных таблиц или с помощью микрокалькулятора. Например, значение $\arcsin\frac{2}{3}$ можно вычислить на микрокалькуляторе МК-54 по программе

2 [B↑] 3 [÷] [F] [$\sin^{-1}$] 7,2972769·10^{-1}.

Итак, $\arcsin\frac{2}{3}\approx 0{,}73$. При этом переключатель микрокалькулятора Р-ГРД-Г был установлен в положение Р (радиан).

Задача 4*. Решить уравнение $(3\sin x-1)(2\sin 2x+1)=0$.

△ 1) $3\sin x-1=0$, $\sin x=\frac{1}{3}$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

2) $2\sin 2x+1=0$, $\sin 2x=-\frac{1}{2}$, $2x=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+$

$+\pi n=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Ответ. $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. ▲

Можно доказать, что *для любого* $a\in[-1;\ 1]$ *справедлива формула*

$$\arcsin(-a)=-\arcsin a. \tag{5}$$

Эта формула позволяет находить значения арксинусов отрицательных чисел через значения арксинусов положительных чисел. Например:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arcsin\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}.$$

Отметим, что из формулы (4) следует, что корни уравнения $\sin x=a$ при $a=0$, $a=1$, $a=-1$ можно находить по более простым формулам:

$\sin x=0$	$x=\pi n$, $n\in Z$ (6)
$\sin x=1$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$ (7)
$\sin x=-1$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$ (8)

Задача 5. Решить уравнение $\sin 2x=1$.

△ По формуле (7) имеем $2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$, откуда

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.\ ▲$$

Упражнения

Вычислить **(218—219)**.

218. 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin 1$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arcsin\frac{1}{2}$; 5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

219. 1) $\arcsin 1-\arcsin(-1)$; 2) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

3) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

220. Сравнить числа:

1) $\arcsin\frac{1}{4}$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arcsin(-1)$.

Решить уравнение **(221—224)**.

221. 1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\sin x=-\frac{1}{2}$.

222. 1) $\sin x=\frac{3}{4}$; 2) $\sin x=\frac{2}{7}$; 3) $\sin x=-\frac{1}{4}$; 4) $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

223. 1) $\sin 3x=1$; 2) $\sin 2x=-1$; 3) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3}=-1$;

4) $2\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}$; 5) $\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=0$; 6) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0$.

---

224. 1) $\sin 4x\cos 2x=\cos 4x\sin 2x$;
2) $\cos 2x\sin 3x=\sin 2x\cos 3x$.

225. Выяснить, имеет ли смысл выражение:

1) $\arcsin(\sqrt{5}-2)$; 2) $\arcsin(\sqrt{5}-3)$;

3) $\arcsin(3-\sqrt{17})$; 4) $\arcsin(2-\sqrt{10})$;

5) $\operatorname{tg}\left(6\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение **(226—228)**.

226. 1) $1-4\sin x\cos x=0$; 2) $\sqrt{3}+4\sin x\cos x=0$;

3) $1+6\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}=0$; 4) $1-8\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}=0$.

227. 1) $1+\cos 5x\sin 4x=\cos 4x\sin 5x$;
2) $1-\sin x\cos 2x=\cos x\sin 2x$.

228. 1) $(2\sin x-1)(3\sin x+1)=0$;
2) $(4\sin x-3)(2\sin x+1)=0$;
3) $(2\sin 2x-1)(\sin 4x+1)=0$;
4) $(4\sin 3x-1)(2\sin x+3)=0$.

229*. Решить уравнение:

1) $\arcsin\left(\frac{x}{2}-3\right)=\frac{\pi}{6}$;

2) $\arcsin(3-2x)=-\frac{\pi}{4}$.

230.** Доказать, что $\sin(\arcsin a)=a$ при $-1\leqslant a\leqslant 1$. Вычислить:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{7}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$;

3) $\sin\left(\pi+\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{3}\right)$;

5) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

231.** Доказать, что $\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$ при $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $7\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$; 2) $4\arcsin\left(\sin\frac{1}{2}\right)$;

3) $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right)$; 4) $\arcsin(\sin 5)$.

232*. С помощью микрокалькулятора решить уравнение:
1) $\sin x=0{,}65$; 2) $\sin x=-0{,}31$.

§ 14. УРАВНЕНИЕ $\operatorname{tg} x=a$

Известно, что тангенс может принимать любое действительное значение. Поэтому уравнение $\operatorname{tg} x=a$ имеет корни при любом значении a.

З а д а ч а 1. Решить уравнение $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$.

△ Построим углы, тангенсы которых равны $\sqrt{3}$. Для этого проведем через точку P (рис. 26) прямую, перпендикулярную PO, и отложим отрезок $PM=\sqrt{3}$, через точки M и O проведем прямую. Эта прямая пересекает единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках M_1 и M_2. Из прямоугольного треугольника POM находим $\frac{PM}{PO}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}=\operatorname{tg} x_1$, откуда $x_1=\frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается из точки $P(1;\,0)$ поворотом вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, где $k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

Точка M_2 получается поворотом точки $P(1;\,0)$ на угол $x_2=\frac{\pi}{3}+\pi$, а также на углы $x=\frac{\pi}{3}+\pi+2\pi k$, где $k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

Итак, корни уравнения $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ можно найти по формулам $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi(2k+1)$, $k\in Z$. Эти формулы объединяются в одну:

$$x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.\ \blacktriangle$$

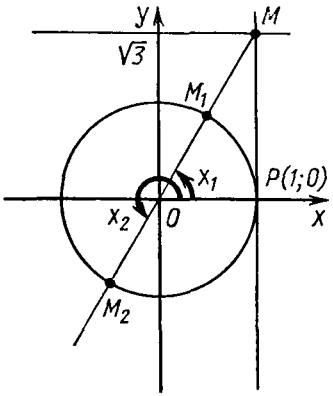


Рис. 26

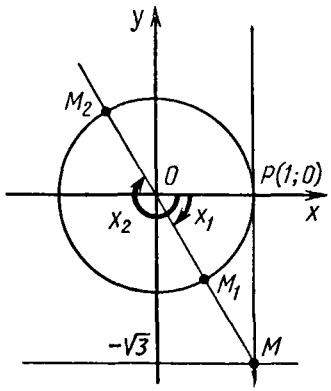


Рис. 27

Задача 2. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

△ Углы, тангенсы которых равны $-\sqrt{3}$, указаны на рисунке 27, где $PM \perp PO$, $PM = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника POM находим $\angle POM = \frac{\pi}{3}$, т. е. $x_1 = -\frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается поворотом точки $P(1; 0)$ на углы $x = -\frac{\pi}{3} + \pi(2k+1)$, $k \in Z$. Поэтому корни уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ можно найти по формуле

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \; n \in Z. \; \blacktriangle$$

Итак, каждое из уравнений $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ имеет бесконечное множество корней. На интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют *арктангенсом числа* $\sqrt{3}$ и записывают: $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; число $-\frac{\pi}{3}$ называют арктангенсом числа $-\sqrt{3}$ и пишут: $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.

Вообще уравнение $\operatorname{tg} x = a$ для любого $a \in \boldsymbol{R}$ имеет на интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключен в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$; если $a < 0$, то в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Этот корень называют *арктангенсом числа a и обозначают* $\operatorname{arctg} a$ (рис. 28).

Таким образом, *арктангенсом числа* $a \in \boldsymbol{R}$ называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

$$\operatorname{arctg} a = \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = a \text{ и } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Например, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$.

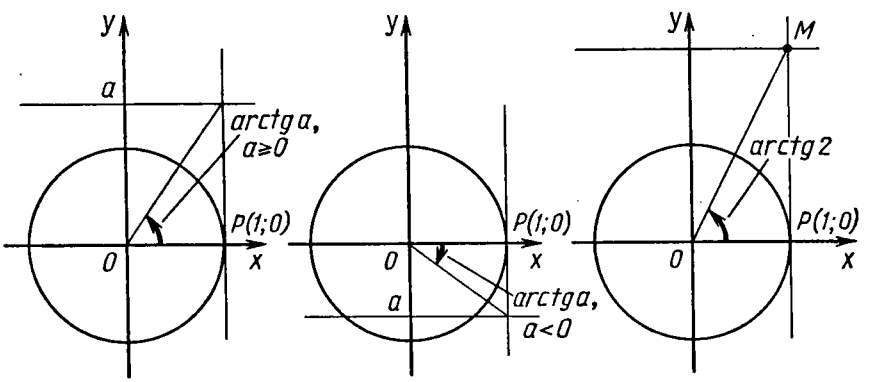
Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что *все корни уравнения* $\operatorname{tg} x = a$, где $a \in \boldsymbol{R}$, *выражаются формулой*

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \; n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

Задача 3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.

△ По формуле (2) находим $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Значение $\operatorname{arctg} 2$ можно приближенно найти из рисунка 29, измеряя угол POM транспортиром.



а) Рис. 28 *б)* Рис. 29

Приближенные значения арктангенса можно также найти по таблицам или с помощью микрокалькулятора.

Например, значение arctg 2 можно вычислить на МК-54 по программе

$$2\ \boxed{\text{F}}\ \boxed{\text{tg}^{-1}}\ \underline{1{,}1071486}.$$

Итак, $\operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}11$.

Задача 4*. Решить уравнение

$$(\operatorname{tg} x+4)(\operatorname{ctg} x-\sqrt{3})=0.$$

△ 1) $\operatorname{tg} x+4=0$, $\operatorname{tg} x=-4$, $x=\operatorname{arctg}(-4)+\pi n$, $n\in Z$.

При этих значениях x первая скобка левой части исходного уравнения обращается в нуль, а вторая не теряет смысла, так как из равенства $\operatorname{tg} x=-4$ следует, что $\operatorname{ctg} x=-\frac{1}{4}$. Следовательно, найденные значения x являются корнями исходного уравнения.

2) $\operatorname{ctg} x-\sqrt{3}=0$, $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n=$ $=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

Эти значения x также являются корнями исходного уравнения, так как при этом вторая скобка левой части уравнения равна нулю, а первая скобка не теряет смысла.

Ответ. $x=\operatorname{arctg}(-4)+\pi n$, $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. ▲

Можно доказать, что *для любого* $a\in R$ *справедлива формула*

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg} a.} \qquad (3)$$

Эта формула позволяет выражать значения арктангенсов отрицательных чисел через значения арктангенсов положительных чисел.

Например:

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3};$$

$$\operatorname{arctg}(-1)=-\operatorname{arctg} 1=-\frac{\pi}{4}.$$

Упражнения

Вычислить (233—234).

233. 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg}(-1)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

234. 1) $6\operatorname{arctg}\sqrt{3}-4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $2\operatorname{arctg}1+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

3) $3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

4) $5\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})-3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

235. Сравнить числа:
1) $\operatorname{arctg}(-3)$ и $\operatorname{arctg}2$; 2) $\operatorname{arctg}(-5)$ и $\operatorname{arctg}0$.

Решить уравнение (236—239).

236. 1) $\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$;
4) $\operatorname{tg}x=-1$; 5) $\operatorname{tg}x=4$; 6) $\operatorname{tg}x=-5$.

237. $\operatorname{tg}2x=0$; 2) $\operatorname{tg}3x=0$; 3) $1+\operatorname{tg}\frac{x}{3}=0$;
4) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{x}{6}=0$.

---

238. 1) $(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})=0$; 2) $(\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})=0$;
3) $(\operatorname{tg}x-2)(2\cos x-1)=0$; 4) $(\operatorname{tg}x-4{,}5)(1+2\sin x)=0$;
5) $(\operatorname{tg}x+4)\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)=0$; 6) $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{6}+1\right)(\operatorname{tg}x-1)=0$.

239*. 1) $\operatorname{arctg}(5x-1)=\frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}(3-5x)=-\frac{\pi}{3}$.

240.** Доказать, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a)=a$ при любом a. Вычислить:
1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2{,}1)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-0{,}3))$;
3) $\operatorname{tg}(\pi-\operatorname{arctg}7)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}6\right)$.

241.** Доказать, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha)=\alpha$ при $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $3\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\right)$; 2) $4\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}0{,}5)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}13)$.

242*. С помощью микрокалькулятора решить уравнение:
1) $\operatorname{tg}x=9$; 2) $\operatorname{tg}x=-7{,}8$.

§ 15. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В предыдущих параграфах были выведены формулы корней простейших тригонометрических уравнений $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$. К этим уравнениям сводятся другие тригонометрические уравнения. Для решения большинства таких уравнений требуется применение формул преобразований тригонометрических выражений. Рассмотрим некоторые примеры решения тригонометрических уравнений.

1. Уравнения, сводящиеся к квадратам

Задача 1. Решить уравнение $\sin^2 x+\sin x-2=0$.

△ Это уравнение является квадратным относительно $\sin x$. Обозначив $\sin x=y$, получим уравнение $y^2+y-2=0$. Его корни $y_1=1$, $y_2=-2$. Таким образом, решение исходного уравнения свелось к решению простейших уравнений $\sin x=1$ и $\sin x=-2$.

Уравнение $\sin x=1$ имеет корни $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; уравнение $\sin x=-2$ не имеет корней.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. ▲

Задача 2. Решить уравнение $2\cos^2 x-5\sin x+1=0$.

△ Заменяя $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, получаем:

$$2(1-\sin^2 x)-5\sin x+1=0, \text{ или } 2\sin^2 x+5\sin x-3=0.$$

Обозначая $\sin x=y$, получаем $2y^2+5y-3=0$, откуда $y_1=-3$, $y_2=\frac{1}{2}$.

1) $\sin x=-3$ — уравнение не имеет корней, так как $|-3|>1$.

2) $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. ▲

Задача 3*. Решить уравнение $2\sin^2 x-\cos x-1=0$.

△ Используя формулу $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, получаем:

$$2(1-\cos^2 x)-\cos x-1=0, \text{ или } 2\cos^2 x+\cos x-1=0.$$

$$\cos x=y,\ 2y^2-y-1=0,\ y_1=1,\ y_2=-\frac{1}{2}.$$

1) $\cos x=1$, $x=2\pi n$, $n\in Z$.

2) $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n=\pm\left(\pi-\right.$

$\left.-\arccos\frac{1}{2}\right)+2\pi n=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi n=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ. $x=2\pi n$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. ▲

Задача 4. Решить уравнение $\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x+1=0$.

△ Так как $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, то уравнение можно записать в виде

$$\operatorname{tg} x-\frac{2}{\operatorname{tg} x}+1=0.$$

Умножая обе части уравнения на $\operatorname{tg} x$, получаем:

$$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2=0.$$

$$\operatorname{tg} x=y,\ y^2+y-2=0,\ y_1=1,\ y_2=-2.$$

1) $\operatorname{tg} x=1,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

2) $\operatorname{tg} x=-2,\ x=\operatorname{arctg}(-2)+\pi n=-\operatorname{arctg} 2+\pi n,\ n\in Z$.

Отметим, что левая часть исходного уравнения имеет смысл, если $\operatorname{tg} x\neq 0$ и $\operatorname{ctg} x\neq 0$. Так как для найденных корней $\operatorname{tg} x\neq 0$ и $\operatorname{ctg} x\neq 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2=0$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=-\operatorname{arctg} 2+\pi n,\ n\in Z$. ▲

Задача 5. Решить уравнение

$$3\cos^2 6x+8\sin 3x\cos 3x-4=0.$$

△ Используя формулы

$$\sin^2 6x+\cos^2 6x=1,\ \sin 6x=2\sin 3x\cos 3x,$$

преобразуем уравнение:

$$3(1-\sin^2 6x)+4\sin 6x-4=0,$$

$$3\sin^2 6x-4\sin 6x+1=0.$$

Обозначив $\sin 6x=y$, получим уравнение $3y^2-4y+1=0$, откуда $y_1=1,\ y_2=\frac{1}{3}$.

1) $\sin 6x=1,\ 6x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$.

2) $\sin 6x=\frac{1}{3},\ 6x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ x=\frac{(-1)^n}{6}\arcsin\frac{1}{3}+$ $+\frac{\pi n}{6},\ n\in Z$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ x=\frac{(-1)^n}{6}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{6},\ n\in Z$. ▲

2. Уравнения вида $a\sin x+b\cos x=c$

Задача 6. Решить уравнение $2\sin x-3\cos x=0$.

△ Поделив уравнение на $\cos x$, получим $2\operatorname{tg} x-3=0$, $\operatorname{tg} x=\frac{3}{2},\ x=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n,\ n\in Z$. ▲

При решении этой задачи обе части уравнения $2\sin x - \cos x = 0$ были поделены на $\cos x$. Напомним, что при делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Поэтому нужно проверить, не являются ли корни уравнения $\cos x = 0$ корнями данного уравнения. Если $\cos x = 0$, то из уравнения $2\sin x - \cos x = 0$ следует, что $\sin x = 0$. Однако $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, при делении уравнения $a\sin x + b\cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, на $\cos x$ (или $\sin x$) корни этого уравнения не теряются.

Задача 7. Решить уравнение $2\sin x + \cos x = 2$.

△ Используя формулы $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ и записывая правую часть уравнения в виде $2 = 2\cdot 1 = 2\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$, получаем $4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2}$, $3\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0$.

Поделив это уравнение на $\cos^2\frac{x}{2}$, получим $3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 4\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0$. Обозначая $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$, получаем уравнение $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$, $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 8*. Решить уравнение $\sin 2x - \sin x - \cos x - 1 = 0$.

△ Выразим $\sin 2x$ через $\sin x + \cos x$, используя тождество

$$\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1.$$

Обозначим $\sin x + \cos x = t$, тогда $\sin 2x = t^2 - 1$ и уравнение примет вид $t^2 - t - 2 = 0$, откуда $t_1 = -1$, $t_2 = 2$.

1) $\sin x + \cos x = -1$, $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = -\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}$, $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$,

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0, \quad \cos\frac{x}{2} = 0,$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1,$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

2) Уравнение $\sin x+\cos x=2$ не имеет корней, так как $\sin x\leqslant 1$, $\cos x\leqslant 1$ и равенства $\sin x=1$, $\cos x=1$ одновременно не могут выполняться.

Ответ. $x=\pi+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. ▲

3. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители

Многие тригонометрические уравнения, правая часть которых равна нулю, решаются разложением их левой части на множители.

Задача 9. Решить уравнение $\sin 2x-\sin x=0$.

△ Используя формулу для синуса двойного аргумента, запишем уравнение в виде $2\sin x\cos x-\sin x=0$.

Вынося общий множитель $\sin x$ за скобки, получаем

$$\sin x\,(2\cos x-1)=0.$$

1) $\sin x=0$, $x=\pi n$, $n\in Z$.

2) $2\cos x-1=0$, $\cos x=\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ. $x=\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. ▲

Задача 10. Решить уравнение $\cos 3x+\sin 5x=0$.

△ Используя формулу приведения $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, запишем уравнение в виде

$$\cos 3x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=0.$$

Используя формулу для суммы косинусов, получаем:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$, $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{3}{4}\pi+\pi n$, $n\in Z$;

2) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, $4x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{3}{16}\pi+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$.

Ответ. $x=\frac{3}{4}\pi+\pi n$, $x=\frac{3}{16}\pi+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. ▲

Задача 11. Решить уравнение $\sin 7x+\sin 3x=3\cos 2x$.

△ Применяя формулу для суммы синусов, запишем уравнение в виде

$2\sin 5x\cdot\cos 2x=3\cos 2x$, или $2\sin 5x\cdot\cos 2x-3\cos 2x=0$,

откуда $\cos 2x\left(\sin 5x-\frac{3}{2}\right)=0$.

Уравнение $\cos 2x=0$ имеет корни $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, а уравнение $\sin 5x=\frac{3}{2}$ не имеет корней.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. ▲

Задача 12. Решить уравнение $\cos 3x\cdot\cos x=\cos 2x$.

△ Так как $\cos 2x=\cos(3x-x)=\cos 3x\cdot\cos x+\sin 3x\cdot\sin x$, уравнение примет вид: $\sin x\cdot\sin 3x=0$.

1) $\sin x=0$, $x=\pi n$, $n\in Z$;

2) $\sin 3x=0$, $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$.

Заметим, что числа вида πn содержатся среди чисел вида $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$, так как если $n=3k$, то $\frac{\pi n}{3}=\pi k$. Следовательно, первая серия корней содержится во второй.

Ответ. $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$. ▲

Часто бывает трудно усмотреть, что две серии корней, полученных при решении тригонометрического уравнения, имеют общую часть. В этих случаях ответ можно оставлять в виде двух серий. Например, ответ к задаче 12 можно было записать и так:

$$x=\pi n,\ x=\frac{\pi n}{3},\ n\in Z.$$

Задача 13*. Решить уравнение

$$(\operatorname{tg} x+1)\left(2\cos\frac{x}{3}-\sqrt{3}\right)=0.$$

△ 1) $\operatorname{tg} x+1=0$, $\operatorname{tg} x=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

Эти значения x являются корнями исходного уравнения, так как при этом первая скобка левой части уравнения равна нулю, а вторая не теряет смысла.

2) $2\cos\frac{x}{3}-\sqrt{3}=0$, $\cos\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{x}{3}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{2}+$ $+6\pi n$, $n\in Z$.

При этих значениях x вторая скобка левой части исходного уравнения равна нулю, а первая скобка не имеет смысла. Поэтому эти значения не являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. ▲

Задача 14*. Решить уравнение $6\sin^2 x+2\sin^2 2x=5$.

△ Выразим $\sin^2 x$ через $\cos 2x$. Так как $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, то $\cos 2x=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x$, $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, откуда $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. Поэтому исходное уравнение можно записать так:

$$3(1-\cos 2x)+2(1-\cos^2 2x)=5,$$

или $2\cos^2 2x+3\cos 2x=0$, $\cos 2x(2\cos 2x+3)=0$.

1) $\cos 2x=0$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$;

2) уравнение $\cos 2x=-\frac{3}{2}$ корней не имеет.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. ▲

Упражнения

Решить уравнение **(243—263)**.

243. 1) $\sin^2 x=\frac{1}{4}$; 2) $\cos^2 x=\frac{1}{2}$;
3) $2\cos^2 x-\cos x-1=0$; 4) $2\sin^2 x+\sin x-1=0$;
5) $2\sin^2 x+\sin x-6=0$; 6) $2\cos^2 x+\cos x-6=0$.

244. 1) $2\cos^2 x-\sin x+1=0$; 2) $3\cos^2 x-\sin x-1=0$;
3) $4\sin^2 x-\cos x-1=0$; 4) $2\sin^2 x+3\cos x=0$.

245. 1) $\operatorname{tg}^2 x=2$; 2) $\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} x$;
3) $\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x=2\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x-4=0$;
5) $\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\operatorname{ctg} x+1=\sqrt{3}$; 6) $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+1=0$.

246. 1) $1+7\cos^2 x=3\sin 2x$; 2) $3+\sin 2x=4\sin^2 x$;
3) $\cos 2x+\cos^2 x+\sin x\cos x=0$;
4) $3\cos 2x+\sin^2 x+5\sin x\cos x=0$.

247. 1) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=0$; 2) $\cos x=\sin x$;
3) $\sin x=2\cos x$; 4) $2\sin x+\cos x=0$.

248. 1) $\sin x-\cos x=1$; 2) $\sin x+\cos x=1$;
3) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$; 4) $\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}$.

249. 1) $\cos x=\cos 3x$; 2) $\sin 5x=\sin x$;
3) $\sin 2x=\cos 3x$; 4) $\sin x+\cos 3x=0$.

250. 1) $\cos 3x-\cos 5x=\sin 4x$; 2) $\sin 7x-\sin x=\cos 4x$;
3) $\cos x+\cos 3x=4\cos 2x$; 4) $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos 4x$.

ства $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ являются числа x, которые принадлежат промежутку $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}$. Все решения данного неравенства — множество отрезков $\frac{\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$. ▲

Задача 3. Решить неравенство $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$.

△ Ординату, не меньшую $-\frac{1}{2}$, имеют все точки дуги M_1MM_2 единичной окружности (рис. 32). Поэтому решениями неравенства $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ являются числа x, принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$. Все решения данного неравенства — множество отрезков $-\frac{\pi}{6}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n \in Z$. ▲

Отметим, что все точки окружности, лежащие ниже прямой M_1M_2, имеют ординату, меньшую $-\frac{1}{2}$ (рис. 32). Поэтому все числа $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right)$ являются решениями неравенства $\sin x < -\frac{1}{2}$. Все решения этого неравенства — интервалы $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in Z$. ▲

Задача 4*. $\cos\left(\frac{x}{4}-1\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

△ Обозначим $\frac{x}{4}-1=y$. Решая неравенство $\cos y \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 33), находим $\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant y \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n \in Z$. Заменяя $y=\frac{x}{4}-1$, получаем $\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant \frac{x}{4}-1 \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi n$, откуда $1+\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant \frac{x}{4} \leqslant 1+\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $4+3\pi+8\pi n \leqslant x \leqslant 4+5\pi+8\pi n$, $n \in Z$.

Ответ. $4+3\pi+8\pi n \leqslant x \leqslant 4+5\pi+8\pi n$, $n \in Z$. ▲

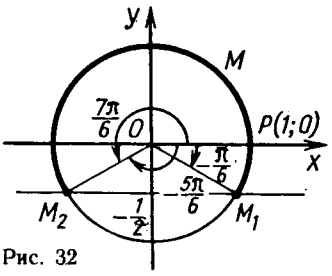


Рис. 32

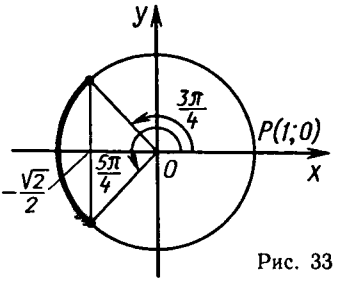


Рис. 33

Упражнения

Решить неравенство **(264—270)**.

264. 1) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

265. 1) $\cos x \leqslant \sqrt{3}$; 2) $\cos x < -2$;

3) $\cos x \geqslant 1$; 4) $\cos x \leqslant -1$.

266. 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

267. 1) $\sin x \geqslant -\sqrt{2}$; 2) $\sin x > 1$; 3) $\sin x \leqslant -1$; 4) $\sin x \geqslant 1$.

---

268. 1) $\sqrt{2}\cos 2x \leqslant 1$; 2) $2\sin 3x > -1$;

3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

269*. 1) $\cos\left(\frac{x}{3}+2\right) \geqslant \frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{4}-3\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

270.** 1) $\sin^2 x + 2\sin x > 0$; 2) $\cos^2 x - \cos x < 0$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

Упростить выражение **(271—272)**.

271. 1) $\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha\left(\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right)$.

272. 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; 2) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

273. Доказать тождество:

1) $1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

Вычислить **(274—275)**.

274. 1) $2\sin 6\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3\alpha\right) - \sin 6\alpha$ при $\alpha = \frac{5\pi}{24}$;

2) $\cos 3\alpha + 2\cos(\pi-3\alpha)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-1{,}5\alpha\right)$ при $\alpha = \frac{5\pi}{36}$.

275. 1) $\dfrac{\sqrt{3}(\cos 75^\circ - \cos 15^\circ)}{1-2\sin^2 15^\circ}$; 2) $\dfrac{2\cos^2\frac{\pi}{8}-1}{1+8\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}}$.

276. Доказать тождество:

1) $\frac{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$; 2) $\frac{2\cos 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

277. Показать, что:

1) $\sin 35^\circ+\sin 25^\circ=\cos 5^\circ$; 2) $\cos 12^\circ-\cos 48^\circ=\sin 18^\circ$.

278. Вычислить:

1) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

2) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}-4\arcsin 1$;

3) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arccos(-1)-\arcsin(-1)$;

5) $2\operatorname{arctg}1+3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

6) $4\operatorname{arctg}(-1)+3\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

Решить уравнение **(279—288)**.

279. 1) $\cos(4-2x)=-\frac{1}{2}$; 2) $\cos(6+3x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)-\sqrt{3}=0$.

280. 1) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$; 2) $1-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$;

3) $3+4\sin(2x+1)=0$; 4) $5\sin(2x-1)-2=0$.

281. 1) $(1+\sqrt{2}\cos x)(1-4\sin x\cdot\cos x)=0$;
2) $(1-\sqrt{2}\cos x)(1+2\sin 2x\cdot\cos 2x)=0$.

282. 1) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$; 2) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{3}-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=0$; 4) $1-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=0$.

283. 1) $2\sin^2 x+\sin x=0$; 2) $3\sin^2 x-5\sin x-2=0$;
3) $\cos^2 x-2\cos x=0$; 4) $6\cos^2 x+7\cos x-3=0$.

284. 1) $6\sin^2 x-\cos x+6=0$; 2) $8\cos^2 x-12\sin x+7=0$.

285. 1) $\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg}x=0$; 2) $2\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x-3=0$;
3) $\operatorname{tg}x-12\operatorname{ctg}x+1=0$; 4) $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$.

286. 1) $2\sin 2x=3\cos 2x$; 2) $4\sin 3x+5\cos 3x=0$.

287. 1) $5\sin x+\cos x=5$; 2) $4\sin x+3\cos x=6$.

288. 1) $\sin 3x=\sin 5x$; 2) $\cos x=\cos 3x$;
3) $\cos^2 3x-\cos 3x\cdot\cos 5x=0$; 4) $\sin x\cdot\sin 5x-\sin^2 5x=0$.

289. Решить неравенство:

1) $\sin x\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найти значение выражения:

$$\frac{1+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\cos(0{,}5\pi+\alpha)} \text{ при } \alpha=\frac{7}{3}\pi;$$

$$\frac{\sin 75^\circ+\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ-\cos 75^\circ};\ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Решить уравнение:

$$\sin 3x\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos 3x=1;$$
$$2\cos^2 x+5\cos x=3;$$
$$\operatorname{tg} x-3\operatorname{ctg} x=0;$$
$$\sin 3x-\sin x=0;$$
$$2\sin x+\sin 2x=0.$$

3. Решить неравенство:

$$\sin x>\frac{1}{2};\ \cos x<0.$$

---

290. Упростить выражение:

$$\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)}.$$

Доказать тождество **(291—292)**:

291. 1) $\dfrac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\frac{7\pi}{6}+2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)}=-\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\alpha;$

2) $\dfrac{4\sin^4(\alpha-1{,}5\pi)}{\sin^4(\alpha-2{,}5\pi)+\cos^4(\alpha+2{,}5\pi)-1}=-2\operatorname{ctg}^2\alpha;$

3) $\dfrac{-2\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4(\alpha-1{,}5\pi)+\sin^4(\alpha+1{,}5\pi)-1}=\operatorname{ctg}^2\alpha;$

4) $\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin(2{,}5\pi-2\alpha)}{\cos(4{,}5\pi-2\alpha)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{3}}.$

292. 1) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha;$ 2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$

3) $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos 2\alpha+\cos\alpha+1}{\cos\alpha+2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1}=2\cos\dfrac{3}{2}\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

4) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=-\dfrac{2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$.

293. Упростить выражение:

1) $\dfrac{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$; 2) $\dfrac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

Вычислить **(294—295)**.

294. 1) $\cos\left(\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\dfrac{1}{2}\right)$;

3) $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{2}\right)$; 4) $\sin\left(\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

5) $\operatorname{tg}\left(\arccos\dfrac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

295. 1) $\sin(4\arcsin 1)$; 2) $\sin\left(3\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\cos\left(5\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\cos(6\arcsin 1)$;

5) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\dfrac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(4\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение **(296—303)**.

296. 1) $\sin 2x+2\cos 2x=1$; 2) $\cos 2x+3\sin 2x=3$.

297. 1) $3\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$;
2) $2\sin^2 x+3\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

298. 1) $1+2\sin x=\sin 2x+2\cos x$;
2) $1+3\cos x=\sin 2x+3\sin x$.

299. 1) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1+\cos 2x$;

2) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2x$.

300. 1) $\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\dfrac{1}{4}$;

2) $\sin^3 x\cos x+\cos^3 x\sin x=\dfrac{1}{4}$.

301. 1) $\sin^2 x+\sin^2 2x=1$; 2) $\sin^2 x+\cos^2 2x=1$;
3) $\sin 4x=6\cos^2 2x-4$; 4) $2\cos^2 3x+\sin 5x=1$.

302. 1) $\sin^2 x-\cos x\cos 3x=\dfrac{1}{4}$; 2) $\sin 3x=3\sin x$;
3) $3\cos 2x-7\sin x=4$; 4) $1+\cos x+\cos 2x=0$;
5) $\cos 4x-\sin 2x=1$;
6) $5\sin 2x+4\cos^3 x-8\cos x=0$.

303. 1) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 7x$;
2) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$;
3) $\sin x-\sin 3x=\sin 2x-\sin 4x$;
4) $\cos x-\cos 3x=\cos 2x-\cos 4x$.

304.** Найти значение выражения $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, если

$$\sin\alpha+\cos\alpha=m.$$

305.** Доказать, что выражение $\dfrac{1-\cos^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\sin^4\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$

не зависит от α, если $\alpha\neq\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

306.** Пусть α, β и γ — внутренние углы треугольника. Доказать, что $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2$.

Вычислить **(307—308)**.

307*. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;
3) $\sin\left(\pi-\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\pi+\arcsin\frac{2}{3}\right)$;
5) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{5}\right)$.

308*. 1) $\operatorname{tg}\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{5}{4}\right)$;
3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}3\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}2\right)$.

Решить уравнение **(309—313)**.

309.** 1) $\frac{\sin 2x}{\sin x}=0$; 2) $\frac{\sin 3x}{\sin x}=0$; 3) $\frac{\cos 2x}{\cos x}=0$;
4) $\frac{\cos 3x}{\cos x}=0$; 5) $\frac{\sin x}{\sin 5x}=0$; 6) $\frac{\cos x}{\cos 7x}=0$.

310.** 1) $\sin x\sin 5x=1$; 2) $\sin x\cos 4x=-1$;
3) $\cos x\sin 5x=-1$; 4) $\sin x\cos 3x=-1$.

311.** 1) $2\cos 3x=3\sin x+\cos x$; 2) $\cos 3x-\cos 2x=\sin 3x$.

312.** 1) $\sin 2x+\cos 2x=2\operatorname{tg}x+1$; 2) $\sin 2x-\cos 2x=\operatorname{tg}x$.

313.** 1) $\cos^2 x+\cos^2 2x=\sin^2 3x$;
2) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=\frac{3}{2}$.

314.** При каких значениях a уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=a$ имеет корни? Найти эти корни.

315.** Решить неравенство:
1) $2\cos^2 x+\sin x-1<0$; 2) $2\sin^2 x-5\cos x+1>0$.

ГЛАВА IV

Тригонометрические функции

§ 17. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Вы знаете, что каждому действительному числу x соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки (1; 0) на угол x радиан. Для этого угла определены $\sin x$ и $\cos x$. Тем самым каждому действительному числу x поставлены в соответствие числа $\sin x$ и $\cos x$, т. е. на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел определены функции

$$y=\sin x \text{ и } y=\cos x.$$

Таким образом, *областью определения функций* $y=\sin x$ и $y=\cos x$ является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Чтобы найти множество значений функции $y=\sin x$, нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x, т. е. установить, для каких значений y есть такие значения x, при которых $\sin x=y$. Известно, что уравнение $\sin x=a$ имеет корни, если $|a|\leqslant 1$, и не имеет корней, если $|a|>1$.

Томсон Уильям, лорд Кельвин (1824—1907) — английский физик, президент Лондонского королевского общества. Дал одну из формулировок второго начала термодинамики, предложил абсолютную шкалу температур (шкалу Кельвина).

Следовательно, *множеством значений* функции $y=\sin x$ является отрезок $-1\leqslant y\leqslant 1$.

Аналогично *множеством значений* функции $y=\cos x$ также является отрезок $-1\leqslant y\leqslant 1$.

Задача 1. Найти область определения функции

$$y=\frac{1}{\sin x+\cos x}.$$

△ Найдем значения x, при которых выражение $\frac{1}{\sin x+\cos x}$ не имеет смысла, т. е. значения x, при которых знаменатель равен нулю. Решая уравнение $\sin x+\cos x=0$, находим $\operatorname{tg} x=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. Следовательно, областью определения данной функции являются все значения $x\neq-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. ▲

Задача 2. Найти множество значений функции

$$y=3+\sin x\cos x.$$

△ Нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x, т. е. установить, для каких значений a уравнение $3+\sin x\cos x=a$ имеет корни. Применяя формулу синуса двойного угла, запишем уравнение так: $3+\frac{1}{2}\sin 2x=a$, откуда $\sin 2x=2a-6$. Это уравнение имеет корни, если $|2a-6|\leqslant 1$, т. е. если $-1\leqslant 2a-6\leqslant 1$, откуда $5\leqslant 2a\leqslant 7$, $2{,}5\leqslant a\leqslant 3{,}5$. Следовательно, множеством значений данной функции является промежуток $2{,}5\leqslant y\leqslant 3{,}5$. ▲

Функция $y=\operatorname{tg} x$ определяется формулой $y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$. Эта функция определена при тех значениях x, для которых $\cos x\neq 0$.

Известно, что $\cos x=0$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

Следовательно, *областью определения* функции $y=\operatorname{tg} x$ является множество чисел $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

Так как уравнение $\operatorname{tg} x=a$ имеет корни при любом действительном значении a, то *множеством значений* функции $y=\operatorname{tg} x$ является множество R всех действительных чисел.

Функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$ называются *тригонометрическими функциями.*

Задача 3. Найти область определения функции

$$y=\sin 3x+\operatorname{tg} 2x.$$

△ Нужно выяснить, при каких значениях x выражение $\sin 3x+\operatorname{tg} 2x$ имеет смысл. Выражение $\sin 3x$ имеет смысл при любом значении x, а выражение $\operatorname{tg} 2x$ — при $2x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, т. е. при $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. Следовательно, областью определения данной функции является множество действительных чисел $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. ▲

Задача 4*. Найти множество значений функции

$$y=3\sin x+4\cos x.$$

△ Выясним, при каких значениях a уравнение $3\sin x+4\cos x=a$ имеет корни. Поделим уравнение на $\sqrt{3^2+4^2}=5$: $\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=\frac{a}{5}$. Так как $0<\frac{3}{5}<1$, то очевидно найдется такой угол α первой четверти $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, что $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ $\left(\text{этот угол } \alpha=\arccos\frac{3}{5}\right)$. Тогда $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$, откуда $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Уравнение примет вид $\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha=\frac{a}{5}$, т. е. $\sin(x+\alpha)=\frac{a}{5}$. Это уравнение имеет корни, если $-1\leqslant\frac{a}{5}\leqslant 1$, т. е. $-5\leqslant a\leqslant 5$.

Ответ. $-5\leqslant y\leqslant 5$. ▲

Упражнения

316. Найти область определения функции:

1) $y=\sin 2x$; 2) $y=\cos\frac{x}{2}$; 3) $y=\cos\frac{1}{x}$;

4) $y=\sin\frac{2}{x}$; 5) $y=\sin\sqrt{x}$; 6) $y=\cos\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

317. Найти множество значений функции:

1) $y=1+\sin x$; 2) $y=1-\cos x$;

3) $y=2\sin x+3$; 4) $y=1-4\cos 2x$;

5) $y=\sin 2x\cos 2x+2$; 6) $y=\frac{1}{2}\sin x\cos x-1$.

318. Найти область определения функции:

1) $y=\frac{1}{\cos x}$; 2) $y=\frac{2}{\sin x}$; 3) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; 4) $y=\operatorname{tg} 5x$.

Найти область определения функции **(319—320)**.

319. 1) $y=\sqrt{\sin x+1}$; 2) $y=\sqrt{\cos x-1}$; 3) $y=\sqrt{2\cos x-1}$;
4) $y=\sqrt{1-2\sin x}$; 5) $y=\lg\sin x$; 6) $y=\ln\cos x$.

320. 1) $y=\dfrac{1}{2\sin^2 x-\sin x}$; 2) $y=\dfrac{2}{\cos^2 x-\sin^2 x}$;
3) $y=\dfrac{1}{\sin x-\sin 3x}$; 4) $y=\dfrac{1}{\cos^3 x+\cos x}$.

321. Найти множество значений функции:
1) $y=2\sin^2 x-\cos 2x$; 2) $y=1-8\cos^2 x\sin^2 x$;
3) $y=\dfrac{1+8\cos^2 x}{4}$; 4) $y=10-9\sin^2 3x$;
5) $y=1-2\,|\cos x|$; 6) $y=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

322*. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=3\cos 2x-4\sin 2x.$$

323*. Найти множество значений функции $y=\sin x-5\cos x$.

324.** Найти множество значений функции

$$y=10\cos^2 x-6\sin x\cos x+2\sin^2 x.$$

§ 18. ЧЕТНОСТЬ, НЕЧЕТНОСТЬ, ПЕРИОДИЧНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Вы знаете, что для любого значения x верны равенства

$$\sin(-x)=-\sin x,\ \cos(-x)=\cos x.$$

Следовательно, $y=\sin x$ — *нечетная* функция, а $y=\cos x$ — *четная* функция. Так как для любого значения x из области определения функции $y=\operatorname{tg} x$ верно равенство $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$, то $y=\operatorname{tg} x$ — *нечетная* функция.

Задача 1. Выяснить, является ли функция

$$y=2+\sin x\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

четной или нечетной.

△ Используя формулу приведения, запишем данную функцию так: $y=2+\sin^2 x$. Имеем $y(-x)=2+\sin^2(-x)=2+(-\sin x)^2=2+\sin^2 x=y(x)$, т. е. данная функция является четной. ▲

Известно, что для любого значения x верны равенства

$$\sin(x+2\pi)=\sin x,\ \cos(x+2\pi)=\cos x.$$

Из этих равенств следует, что значения синуса и косинуса периодически повторяются при изменении аргумента на 2π. Такие функции называются *периодическими с периодом* 2π.

Функция $f(x)$ *называется периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$.

Число T называется *периодом* функции $f(x)$.

Из этого определения следует, что если x принадлежит области определения функции $f(x)$, то числа $x+T$, $x-T$ и вообще числа $x+Tn$, $n \in \boldsymbol{Z}$, также принадлежат области определения этой периодической функции и $f(x+Tn)=f(x)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Покажем, что *число* 2π *является наименьшим положительным периодом функции* $y=\cos x$.

○ Пусть $T>0$ — период косинуса, т. е. для любого x выполняется равенство $\cos(x+T)=\cos x$. Положив $x=0$, получим $\cos T=1$. Отсюда $T=2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Так как $T>0$, то T может принимать значения 2π, 4π, 6π, ... и поэтому период не может быть меньше 2π. ●

Можно доказать, что *наименьший положительный период функции* $y=\sin x$ также *равен* 2π.

Задача 2. Доказать, что $f(x)=\sin 3x$ — периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{3}$.

△ Если функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, то для того, чтобы убедиться в том, что она является периодической с периодом T, достаточно показать, что для любого x верно равенство $f(x+T)=f(x)$. Данная функция определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$, и $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin(3x+2\pi)=\sin 3x=f(x)$. ▲

Покажем, что функция $\operatorname{tg} x$ является периодической с периодом π. Если x принадлежит области определения этой функции, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то по формулам приведения получаем:

$$\operatorname{tg}(x-\pi)=-\operatorname{tg}(\pi-x)=-(-\operatorname{tg} x)=\operatorname{tg} x,\ \operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}(x-\pi)=\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(x+\pi)$.

Следовательно, π — период функции $\operatorname{tg} x$.

Покажем, что π — *наименьший положительный период функции* $\operatorname{tg} x$.

○ Пусть T — период тангенса, тогда $\operatorname{tg}(x+T)=\operatorname{tg} x$, откуда при $x=0$ получаем:

$$\operatorname{tg} T=0,\ T=k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как наименьшее целое положительное k равно 1, то π — наименьший положительный период функции $\operatorname{tg} x$. ●

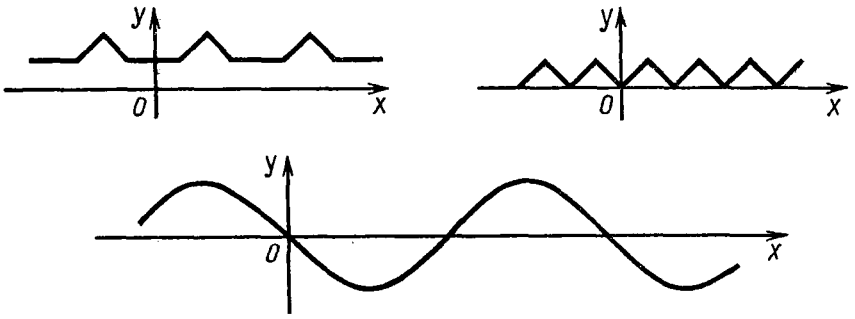


Рис. 34

Задача 3. Доказать, что $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ — периодическая функция с периодом 3π.

△ Так как $\operatorname{tg}\frac{x+3\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{x-3\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}-\right.$ $\left.-\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, то $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ — периодическая функция с периодом 3π. ▲

Периодическими функциями описываются многие физические процессы (колебания маятника, вращение планет, переменный ток и т. д.).

На рисунке 34 изображены графики некоторых периодических функций.

Отметим, что на всех последовательных отрезках числовой прямой, длина которых равна периоду, график периодической функции имеет один и тот же вид.

Упражнения

Выяснить, является ли данная функция четной или нечетной **(325—326)**.

325. 1) $y=\cos 3x$; 2) $y=2\sin 4x$; 3) $y=\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2 x$;
4) $y=x\cos\frac{x}{2}$; 5) $y=x\sin x$; 6) $y=2\sin^2 x$.

326. 1) $y=\sin x+x$;

2) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-x^2$;

3) $y=3-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\sin(\pi-x)$;

4) $y=\frac{1}{2}\cos 2x\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2x\right)+3$;

5) $y=\frac{\sin x}{x}+\sin x\cdot\cos x$; 6) $y=x^2+\frac{1+\cos x}{2}$.

327. Доказать, что данная функция является периодической с периодом 2π:

1) $y=\cos x-1$; 2) $y=\sin x+1$; 3) $y=3\sin x$;

4) $y=\frac{\cos x}{2}$; 5) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 6) $y=\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

328. Доказать, что данная функция является периодической с периодом T, если:

1) $y=\sin 2x$, $T=\pi$; 2) $y=\cos\frac{x}{2}$, $T=4\pi$;

3) $y=\operatorname{tg} 2x$, $T=\frac{\pi}{2}$; 4) $y=\sin\frac{4x}{5}$, $T=\frac{5}{2}\pi$.

---

329. Определить, является ли данная функция четной или нечетной:

1) $y=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; 2) $y=\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1+\cos 2x}$; 3) $y=\frac{\cos 2x-x^2}{\sin x}$;

4) $y=\frac{x^3+\sin 2x}{\cos x}$; 5) $y=3^{\cos x}$; 6) $y=x\,|\sin x|\,\sin^3 x$.

Найти наименьший положительный период функции (**330—331**).

330*. 1) $y=\cos\frac{2}{5}x$; 2) $y=\sin\frac{3}{2}x$; 3) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

4) $y=|\sin x|$.

331**. 1) $y=\sin x+\cos x$; 2) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$.

332**. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Доказать, что:

1) $f(x)+f(-x)$ — четная функция;

2) $f(x)-f(-x)$ — нечетная функция.

Используя эти функции, представить $f(x)$ в виде суммы четной и нечетной функции.

§ 19. ФУНКЦИЯ $y=\cos x$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Напомним, что функция $y=\cos x$ определена на всей числовой прямой и множеством ее значений является отрезок $[-1; 1]$. Следовательно, *график этой функции расположен в полосе между прямыми* $y=-1$ *и* $y=1$.

Так как функция $y=\cos x$ периодическая с периодом 2π, то *достаточно построить ее график на каком-нибудь промежутке длиной* 2π, например на отрезке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$; тогда на промежутках, получаемых сдвигами выбранного отрезка на $2\pi n$, $n\in Z$, график будет таким же.

Функция $y=\cos x$ является четной. Поэтому ее график симметричен относительно оси Oy. Для построения графика на отрезке

$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ достаточно построить его для $0 \leqslant x \leqslant \pi$, а затем симметрично отразить относительно оси Oy.

Прежде чем перейти к построению графика, покажем, что *функция $y=\cos x$ убывает на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$.*

○ В самом деле, при повороте точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол от 0 до π абсцисса точки, т. е. $\cos x$, уменьшается от 1 до -1. Поэтому если $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$, то $\cos x_1 > \cos x_2$ (рис. 35). Это и означает, что функция $y=\cos x$ убывает на отрезке $[0; \pi]$. ●

Используя свойство убывания функции $y=\cos x$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и найдя несколько точек, принадлежащих графику, построим его на этом отрезке (рис. 36).

Пользуясь свойством четности функции $y=\cos x$, отразим построенный на отрезке $[0; \pi]$ график симметрично относительно оси Oy, получим график этой функции на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 37).

Так как $y=\cos x$ — периодическая функция с периодом 2π и ее график построен на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной, равной периоду, распространим его по всей числовой прямой с помощью сдвигов на 2π, 4π и т. д. вправо, на -2π, -4π и т. д. влево, т. е. вообще на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 38).

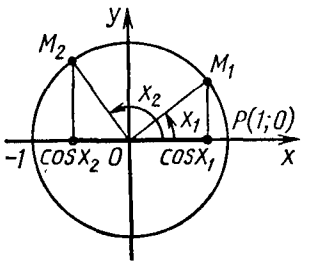


Рис. 35

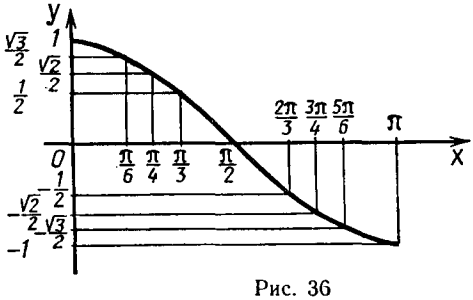


Рис. 36

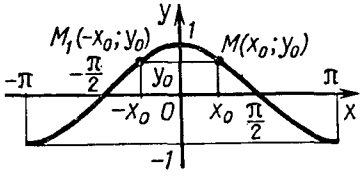


Рис. 37

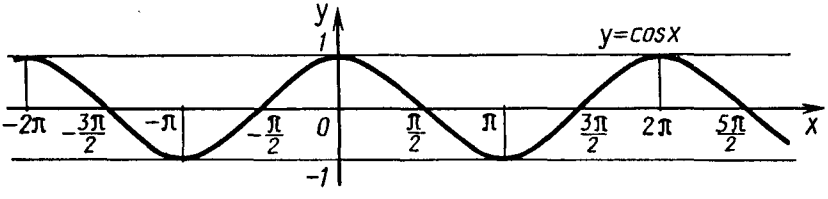


Рис. 38

Итак, график функции $y=\cos x$ построен геометрически на всей числовой прямой, начиная с построения его части на отрезке $[0;\ \pi]$. Поэтому свойства функции $y=\cos x$ можно получить, опираясь на свойства этой функции на отрезке $[0;\ \pi]$. Например, функция $y=\cos x$ возрастает на отрезке $[-\pi;\ 0]$, так как она убывает на отрезке $[0;\ \pi]$ и является четной.

Перечислим основные *свойства функции* $y=\cos x$;

1) *Область определения* — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
2) *Множество значений* — отрезок $[-1;\ 1]$.
3) Функция $y=\cos x$ *периодическая* с периодом 2π.
4) Функция $y=\cos x$ *четная*.
5) Функция $y=\cos x$ принимает:
   — *значение, равное* 0, при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$;
   — *наибольшее значение*, равное 1, при $x=2\pi n,\ n\in Z$;
   — *наименьшее значение*, равное -1, при $x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$;
   — *положительные значения* на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n,\ n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$;
   — *отрицательные значения* на интервале $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n,\ n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.
6) Функция $y=\cos x$:
   — *возрастает* на отрезке $[\pi;\ 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n,\ n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$;
   — *убывает* на отрезке $[0;\ \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n,\ n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

Задача 1. Найти все корни уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$.

△ Построим графики функций $y=\cos x$ и $y=-\frac{1}{2}$ на данном отрезке (рис. 39). Эти графики пересекаются в трех точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$.

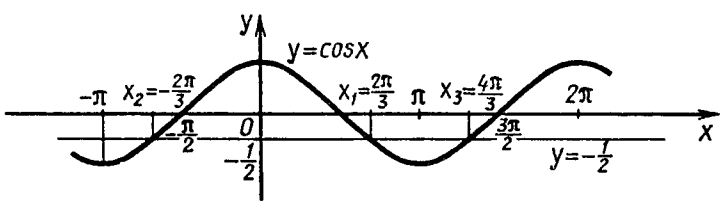


Рис. 39

На отрезке $[0;\ \pi]$ корнем уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ является число $x_1 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Из рисунка видно, что точки x_2 и x_1 симметричны относительно оси Oy, т. е. $x_2 = -x_1 = -\frac{2\pi}{3}$, а $x_3 = x_2 + 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$.

Ответ. $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \frac{4\pi}{3}$. ▲

Задача 2. Найти все решения неравенства $\cos x > -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

△ Из рисунка 39 видно, что график функции $y = \cos x$ лежит выше графика функции $y = -\frac{1}{2}$ на промежутках $\left(-\frac{2\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{4\pi}{3};\ 2\pi\right]$.

Ответ. $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} < x \leqslant 2\pi$. ▲

Упражнения

Пользуясь графиком функции $y = \cos x$, выполнить упражнения **(333—338)**.

333. (Устно.) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0;\ 3\pi]$, функция $y = \cos x$ принимает:

1) значение, равное 0; 1; -1;
2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

334. (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \cos x$ на отрезке:

1) $[3\pi;\ 4\pi]$;
2) $[-2\pi;\ -\pi]$;
3) $\left[2\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$;
4) $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$;
5) $[1;\ 3]$;
6) $[-2;\ -1]$.

335. Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \cos x$ возрастала, а на другом убывала:

1) $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$,
2) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;
3) $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$;
4) $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

336. Используя свойство возрастания или убывания функции $y=\cos x$, сравнить числа:

1) $\cos\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$;
2) $\cos\frac{8\pi}{7}$ и $\cos\frac{10\pi}{7}$;
3) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$;
4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;
5) $\cos 1$ и $\cos 3$;
6) $\cos 4$ и $\cos 5$.

337. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\ 3\pi]$:

1) $\cos x=\frac{1}{2}$;
2) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\cos x=-\frac{1}{2}$.

338. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0;\ 3\pi]$:

1) $\cos x\geqslant\frac{1}{2}$;
2) $\cos x\geqslant-\frac{1}{2}$;
3) $\cos x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

339. Выражая синус через косинус по формулам приведения, сравнить числа:

1) $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{\pi}{5}$;
2) $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$;
3) $\cos\frac{5\pi}{8}$ и $\sin\frac{5\pi}{8}$;
4) $\sin\frac{3\pi}{5}$ и $\cos\frac{3\pi}{5}$;
5) $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\sin\frac{5\pi}{14}$;
6) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\sin\frac{3\pi}{10}$.

340. Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$:

1) $\cos 2x=\frac{1}{2}$;
2) $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

341. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$:

1) $\cos 2x<\frac{1}{2}$;
2) $\cos 3x>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

342*. Построить график функции и выяснить ее свойства:

1) $y=1+\cos x$;
2) $y=\cos x-2$;
3) $y=\cos 2x$;
4) $y=3\cos x$.

343*. Найти множество значений функции $y=\cos x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\frac{\pi}{3};\ \pi\right]$;
2) $\left(\frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right)$.

344.** Построить график функции:

1) $y=|\cos x|$;
2) $y=3-2\cos(x-1)$.

§ 20. ФУНКЦИЯ $y=\sin x$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Функция $y=\sin x$ определена на всей числовой прямой, является нечетной и периодической с периодом 2π. Ее график можно построить таким же способом, как и график функции $y=\cos x$, начиная с построения, например, на отрезке $[0;\ \pi]$. Однако проще воспользоваться следующей формулой:

$$\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

Эта формула показывает, что график функции $y=\sin x$ можно получить сдвигом графика функции $y=\cos x$ вдоль оси абсцисс вправо на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 40).

График функции $y=\sin x$ изображен на рисунке 41.

Кривая, являющаяся графиком функции $y=\sin x$, называется *синусоидой*.

Так как график функции $y=\sin x$ получается сдвигом графика функции $y=\cos x$, то свойства функции $y=\sin x$ можно получить из свойств функции $y=\cos x$.

Перечислим основные *свойства функции* $y=\sin x$:

1) *Область определения* — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
2) *Множество значений* — отрезок $[-1;\ 1]$.
3) Функция $y=\sin x$ *периодическая* с периодом 2π.
4) Функция $y=\sin x$ *нечетная*.

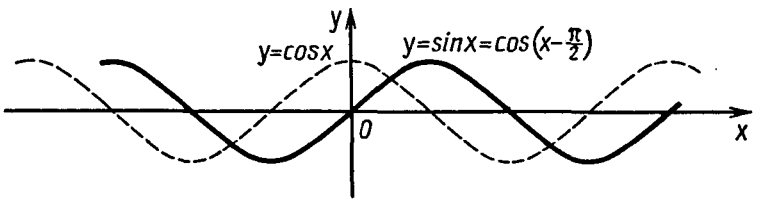


Рис. 40

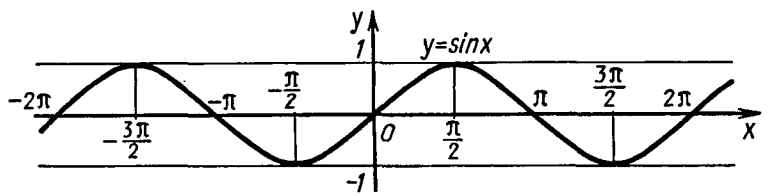


Рис. 41

5) Функция $y=\sin x$ принимает:
— *значение, равное* 0, при $x=\pi n$, $n\in Z$;
— *наибольшее значение*, равное 1, при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;
— *наименьшее значение*, равное -1, при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;
— *положительные значения* на интервале $(0;\ \pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$;
— *отрицательные значения* на интервале $(\pi;\ 2\pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

6) Функция $y=\sin x$:
— *возрастает* на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$;
— *убывает* на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

З а д а ч а 1. Найти все корни уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$.

△ Построим графики функций $y=\sin x$ и $y=\frac{1}{2}$ на данном отрезке (рис. 42). Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых являются корнями уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение имеет корень $x_1=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$. Второй корень $x_2=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$, так как $\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$.

О т в е т. $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{5\pi}{6}$. ▲

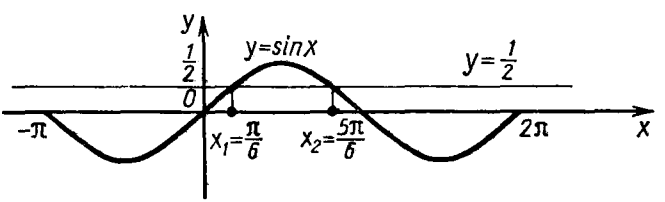


Рис. 42

Задача 2. Найти все решения неравенства $\sin x < \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

△ Из рисунка 42 видно, что график функции $y = \sin x$ лежит ниже графика функции $y = \frac{1}{2}$ на промежутках $\left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

Ответ. $-\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant 2\pi$. ▲

Упражнения

Пользуясь графиком функции $y = \sin x$, выполнить упражнения **(345—350)**.

345. (Устно.) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \sin x$ принимает:
1) значение, равное 0; 1; -1;
2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

346. (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \sin x$ на промежутке:

1) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 5) $[2; 4]$; 6) $(6; 7)$.

347. Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \sin x$ возрастала, а на другом убывала:

1) $[0; \pi]$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$; 3) $[-\pi; 0]$; 4) $[-2\pi; -\pi]$.

348. Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \sin x$, сравнить числа:

1) $\sin \frac{7\pi}{10}$ и $\sin \frac{13\pi}{10}$; 2) $\sin \frac{13\pi}{7}$ и $\sin \frac{11\pi}{7}$;

3) $\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ и $\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$; 4) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$;

5) $\sin 3$ и $\sin 4$; 6) $\sin 7$ и $\sin 6$.

349. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

350. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$; 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

---

351. Выражая косинус через синус по формулам приведения, сравнить числа:

1) $\sin \frac{\pi}{9}$ и $\cos \frac{\pi}{9}$; 2) $\sin \frac{9\pi}{8}$ и $\cos \frac{9\pi}{8}$;

3) $\sin \frac{\pi}{5}$ и $\cos \frac{5\pi}{14}$; 4) $\sin \frac{\pi}{8}$ и $\cos \frac{3\pi}{10}$.

352. Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$:

1) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

353. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$:

1) $\sin 2x \geqslant -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

354. Построить график функции и выяснить ее свойства:

1) $y = 1 - \sin x$; 2) $y = 2 + \sin x$;
3) $y = \sin 3x$; 4) $y = 2 \sin x$.

355*. Найти множество значений функции $y = \sin x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$; 2) $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

356.** Построить график функции:

1) $y = \sin |x|$; 2) $y = |\sin x|$.

357.** Сила переменного электрического тока является функцией, зависящей от времени, и выражается формулой

$$J = A \sin (\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза. Построить график этой функции, если:

1) $A = 2$, $\omega = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

2) $A = 1$, $\omega = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

§ 21. ФУНКЦИЯ $y=\operatorname{tg} x$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Напомним, что функция $y=\operatorname{tg} x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$, является нечетной и периодической с периодом π. Поэтому *достаточно построить ее график на промежутке* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. *Затем, отразив его симметрично относительно начала координат, получить график на интервале* $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Наконец, *используя периодичность, построить график функции* $y=\operatorname{tg} x$ *на всей области определения.*

Прежде чем строить график функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, покажем, что на этом промежутке функция $y=\operatorname{tg} x$ *возрастает.*

○ * Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Покажем, что $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$, т. е. $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$.

По условию $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, откуда по свойствам функции $y=\sin x$, имеем $0 \leqslant \sin x_1 < \sin x_2$, а по свойствам функции $y=\cos x$ имеем $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$, откуда $0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$.

Перемножив неравенства $\sin x_1 < \sin x_2$ и $\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$, получим $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$. ●

Используя свойство возрастания функции $y=\operatorname{tg} x$ на промежутке $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ и найдя несколько точек, принадлежащих графику, построим его на этом промежутке (рис. 43).

Пользуясь свойством нечетности функции $y=\operatorname{tg} x$, отразим построенный на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ график симметрично относительно начала координат; получим график этой функции на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 44).

Напомним, что при $x=\pm\frac{\pi}{2}$ функция $y=\operatorname{tg} x$ не определена. Если $x < \frac{\pi}{2}$ и x приближается к $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ приближается к 1, а $\cos x$, оставаясь положительным, стремится к 0. При этом дробь $\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$ *неограниченно возрастает,* и поэтому *график функции*

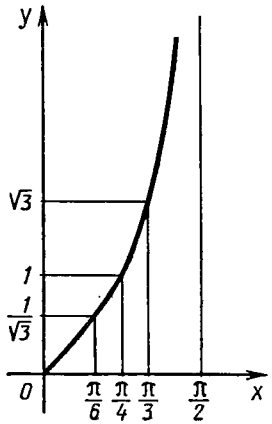


Рис. 43

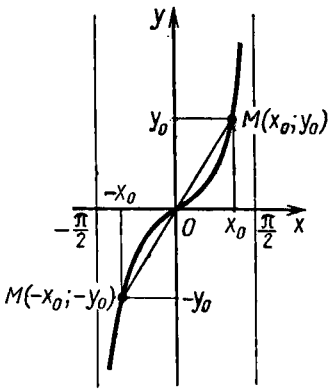


Рис. 44

$y=\operatorname{tg} x$ *приближается к вертикальной прямой* $x=\frac{\pi}{2}$. Аналогично при отрицательных значениях x, больших $-\frac{\pi}{2}$ и приближающихся к $-\frac{\pi}{2}$, график функции $y=\operatorname{tg} x$ приближается к вертикальной прямой $x=-\frac{\pi}{2}$.

Перейдем к построению графика функции $y=\operatorname{tg} x$ *на всей области определения.* Функция $y=\operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π. Следовательно, график этой функции получается из ее графика на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 44) сдвигами вдоль оси абсцисс на πn, $n \in Z$ (рис. 45).

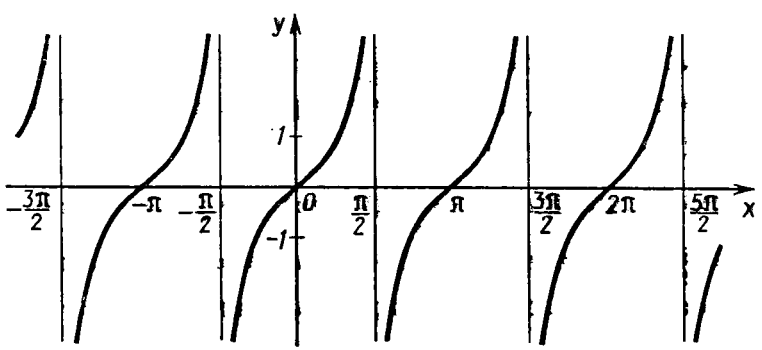


Рис. 45

Итак, весь график функции $y=\operatorname{tg} x$ строится с помощью геометрических преобразований его части, построенной на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому свойства функции $y=\operatorname{tg} x$ можно получить, опираясь на свойства этой функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Например, функция $y=\operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, так как эта функция возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ и является нечетной.

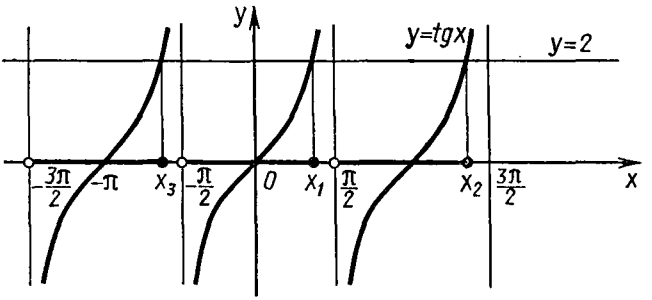
Перечислим основные *свойства функции* $y=\operatorname{tg} x$:

1) *Область определения* — множество всех действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
2) *Множество значений* — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
3) Функция $y=\operatorname{tg} x$ *периодическая* с периодом π.
4) Функция $y=\operatorname{tg} x$ *нечетная*.
5) Функция $y=\operatorname{tg} x$ принимает:
   — *значение, равное* 0, при $x=\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
   — *положительные значения* на интервалах
   $$\left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), \quad n \in \boldsymbol{Z};$$
   — *отрицательные значения* на интервалах
   $$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right), \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$
6) Функция $y=\operatorname{tg} x$ *возрастает* на интервалах
   $$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

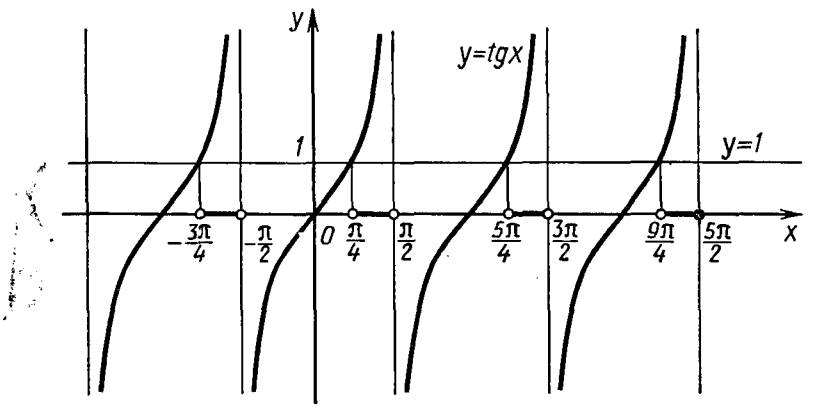
З а д а ч а 1. Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} x=2$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

△ Построим графики функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=2$ на данном отрезке (рис. 46, *а*). Эти графики пересекаются в трех точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $\operatorname{tg} x=2$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ уравнение имеет корень $x_1=\operatorname{arctg} 2$. Так как функция $y=\operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π, то $x_2=\operatorname{arctg} 2+\pi$, $x_3=\operatorname{arctg} 2-\pi$.

О т в е т. $x_1=\operatorname{arctg} 2$, $x_2=\operatorname{arctg} 2+\pi$, $x_3=\operatorname{arctg} 2-\pi$. ▲



а)



б)

Рис. 46

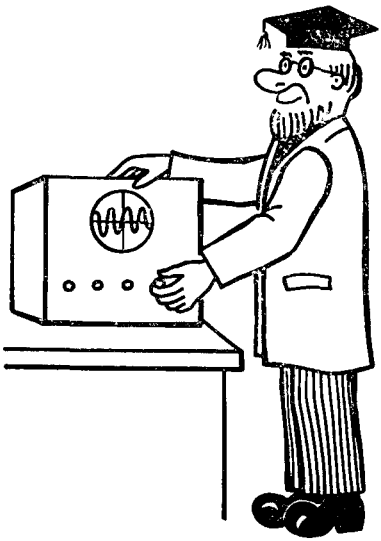
Задача 2. Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x \leqslant 2$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

△ Из рисунка 46, *а* видно, что график функции $y=\operatorname{tg} x$ лежит не выше прямой $y=2$ на промежутках $[-\pi;\ x_3]$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ x_1\right]$ и $\left(\frac{\pi}{2};\ x_2\right]$. Ответ. $-\pi \leqslant x \leqslant -\pi + \operatorname{arctg} 2$, $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant \operatorname{arctg} 2$, $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi + \operatorname{arctg} 2$. ▲

Задача 3. Решить неравенство $\operatorname{tg} x > 1$.

△ Построим графики функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=1$ (рис. 46, *б*). Рисунок показывает, что график функции $y=\operatorname{tg} x$ лежит выше прямой $y=1$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$, а также на промежутках, полученных сдвигами его на π, 2π, 3π, $-\pi$, -2π и т. д.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. ▲



Тригонометрические функции широко применяются в математике, физике и технике. Например, многие процессы, такие, как колебание струны, колебание маятника, напряжение в цепи переменного тока и т. д., описываются функцией, которая задается формулой $y=A\sin(\omega x+\varphi)$. Такие процессы называют *гармоническими колебаниями*, а описывающие их функции — *гармониками* (от греческого harmonikos — соразмерный). График функции $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ получается из синусоиды $y=\sin x$ сжатием или растяжением ее вдоль координатных осей и сдвигом вдоль оси Ox. Обычно гармоническое колебание является функцией времени: $y=A\sin(\omega t+\varphi)$, где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза, $\frac{2\pi}{\omega}$ — период колебания.

Упражнения

Пользуясь графиком функции $y=\operatorname{tg} x$, выполнить упражнения **(358—363)**.

358. (Устно.) Выяснить, при каких значениях x из промежутка $-\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ функция $y=\operatorname{tg} x$ принимает:
1) значение, равное 0;
2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

359. (Устно.) Выяснить, является ли функция $y=\operatorname{tg} x$ возрастающей на промежутке:

1) $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{8}\right)$; 4) $[2;3]$.

360. Используя свойство возрастания функции $y=\operatorname{tg} x$, сравнить числа:

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$ и $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$;

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$;

5) $\operatorname{tg} 2$ и $\operatorname{tg} 3$; 6) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 1{,}5$.

361. Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $(-\pi;\ 2\pi)$:

1) $\operatorname{tg} x=1$; 2) $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x=-1$.

362. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $(-\pi;\ 2\pi)$:

1) $\operatorname{tg} x\geqslant 1$; 2) $\operatorname{tg} x<\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x<-1$; 4) $\operatorname{tg} x\geqslant-\sqrt{3}$.

363. Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg} x<1$; 2) $\operatorname{tg} x\geqslant\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x>-1$.

---

364. Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0;\ 3\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x=3$; 2) $\operatorname{tg} x=-2$.

365. Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg} x>4$; 2) $\operatorname{tg} x\leqslant 5$; 3) $\operatorname{tg} x<-4$; 4) $\operatorname{tg} x\geqslant-5$.

366. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $[0;\ 3\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x\geqslant 3$; 2) $\operatorname{tg} x<4$; 3) $\operatorname{tg} x\leqslant-4$; 4) $\operatorname{tg} x>-3$.

367. Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$:

1) $\operatorname{tg} 2x=\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} 3x=-1$.

368. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$:

1) $\operatorname{tg} 2x\leqslant 1$; 2) $\operatorname{tg} 3x<-\sqrt{3}$.

369*. Построить график функции и выяснить ее свойства:

1) $y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y=\operatorname{tg} x-2$;

3) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$; 4) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

370*. Найти множество значений функции $y=\operatorname{tg} x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{3\pi}{4};\ \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $(0;\ \pi)$; 4) $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

371.** Построить график функции:

1) $y=\operatorname{tg}|x|$; 2) $y=|\operatorname{tg} x|$; 3) $y=\operatorname{ctg} x$; 4) $y=\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

372.** Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg}^2 x<1$; 2) $\operatorname{tg}^2 x\geqslant 3$; 3) $\operatorname{ctg} x\geqslant-1$; 4) $\operatorname{ctg} x>\sqrt{3}$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

373. Найти область определения функции:

1) $y=\sin x+\cos x$; 2) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$;

3) $y=\sqrt{\sin x}$; 4) $y=\sqrt{\cos x}$;

5) $y=\frac{2x}{2\sin x-1}$; 6) $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x-\sin x}$.

374. Найти множество значений функции:

1) $y=1-2\sin^2 x$; 2) $y=2\cos^2 x-1$;
3) $y=3-2\sin^2 x$; 4) $y=2\cos^2 x+5$;
5) $y=\cos 3x\cdot\sin x-\sin 3x\cdot\cos x+4$;
6) $y=\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x-3$.

375. Выяснить, является ли данная функция четной или нечетной:

1) $y=x^2+\cos x$; 2) $y=x^3-\sin x$;

3) $y=(1-x^2)\cos x$; 4) $y=(1+\sin x)\sin x$.

376. Найти наименьший положительный период функции:

1) $y=\cos 7x$; 2) $y=\sin\frac{x}{7}$.

377. Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0;\ 3\pi]$:

1) $2\cos x+\sqrt{3}=0$; 2) $\sqrt{3}-\sin x=\sin x$;
3) $3\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$; 4) $\cos x+1=0$.

378. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $[-2\pi;\ -\pi]$:

1) $1+2\cos x\geqslant 0$; 2) $1-2\sin x<0$;
3) $2+\operatorname{tg} x>0$; 4) $1-2\operatorname{tg} x\leqslant 0$.

379. Решить графически уравнение:

1) $\cos x=x^2$; 2) $\sin x=1-x$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найти область определения функции $y=\operatorname{tg} 4x$. Является ли эта функция четной?
2. Построить схематически график функции $y=\sin x$; $y=\cos x$ на отрезке $[-\pi;\ 2\pi]$. При каких значениях x $y(x)=1$, $y(x)=-1$, $y(x)=0$, $y(x)>0$, $y(x)<0$, функция возрастает? убывает?
3. Построить схематически график функции $y=\operatorname{tg} x$ на отрезке $\left[-\frac{3}{2}\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$. При каких значениях x $\operatorname{tg} x=0$, $\operatorname{tg} x<0$, $\operatorname{tg} x>0$?
4. Решить неравенство $\operatorname{tg} x\geqslant -1$.

380. Найти область определения функции:

1) $y=\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

381. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$; 2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y=1-2\,|\sin 3x|$; 4) $y=\sin^2 x-2\cos^2 x$.

382. Выяснить, является ли данная функция четной или нечетной:

1) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$; 2) $y=\sin x\operatorname{tg} x$;

3) $y=\cos x+|\sin x|$; 4) $y=\sin x\,|\cos x|$.

383. Найти наименьший положительный период функции:

1) $y=2\sin(2x+1)$; 2) $y=3\operatorname{tg}\frac{1}{4}(x+1)$.

384. Решить графически уравнение:

1) $\cos x=|x|$; 2) $\sin x=-|x+1|$.

385. Найти нули функции:

1) $y=\sin^2 x+\sin x$; 2) $y=\cos^2 x-\cos x$;

3) $y=\cos 4x-\cos 2x+\sin x$;

4) $y=\cos x-\cos 2x-\sin 3x$.

386*. Найти все значения x, при которых функция $y=1{,}5-2\sin^2\frac{x}{2}$ принимает положительные значения.

387*. Найти все значения x, при которых функция $y=\operatorname{tg} 2x-1$ принимает отрицательные значения.

388.** Построить график функции:

1) $y=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-2$;

2) $y=\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2$;

3) $y=\sin x+|\sin x|$;

4) $y=\cos x-\sqrt{\cos^2 x}$.

389.** Найти множество значений функции:

1) $y=12\sin x-5\cos x$;

2) $y=\cos^2 x-\sin x$.

390.** Решить неравенство:

1) $\sin x\geqslant\cos x$;

2) $\operatorname{tg} x>\sin x$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА X КЛАССА

391. Выяснить основные свойства функции и построить ее график:

1) $y=3^x+1$; 2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3$;

3) $y=\log_2(x+1)$; 4) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$.

392. Сравнить числа:

1) $2{,}5^{\frac{1}{7}}$ и $2{,}5^{0{,}5}$; 2) $0{,}2^{\frac{2}{3}}$ и $0{,}2^{\frac{3}{4}}$;

3) $\log_{3,1}\sqrt{10}$ и $\log_{3,1}3$; 4) $\log_{0,3}\frac{4}{5}$ и $\log_{0,3}\frac{3}{4}$.

393. Какому из промежутков $0<a<1$ или $a>1$ принадлежит число a, если:

1) $a^{0,2}>1$; 2) $a^{-1,3}>1$;

3) $a^{-3,1}<1$; 4) $a^{2,7}<1$;

5) $\log_a 0{,}2>0$; 6) $\log_a 1{,}3>0$;

7) $\log_a 2{,}4<0$; 8) $\log_a 0{,}4<0$?

Решить уравнение **(394—397)**.

394. 1) $2{,}4^{3-2x}=2{,}4^{3x-2}$; 2) $\left(\frac{5}{3}\right)^x=\left(\frac{3}{5}\right)^{x-2}$;

3) $3^{x+2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{8}}=\left(\frac{1}{16}\right)^{-x}$.

395. 1) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$; 2) $\sqrt[3]{2^x}\cdot\sqrt[3]{3^x}=216$;

3) $2^x\cdot 5^x=0{,}1\,(10^{x-2})^2$; 4) $\left(1\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{25}\right)^x=1$.

396. 1) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=155$; 2) $3^{2x}-2\cdot 3^{2x-1}-2\cdot 3^{2x-2}=1$;

3) $7^x-7^{x-1}=6$; 4) $3^{x+2}+3^x=10$.

397. 1) $3^{2x}-3^x=72$; 2) $4^x-2^{x+1}=48$.

Решить неравенство **(398—399)**.

398. 1) $2{,}5^{1-x}>2{,}5^{-3x}$; 2) $0{,}13^{x-4}\geqslant 0{,}13^{2-x}$;

3) $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$; 4) $3^{-4x}>\sqrt{3}$.

399. 1) $0{,}04^{3x-2}\geqslant 5^{2-x}$; 2) $8^{x-3}\leqslant 0{,}125^{2x}$;

3) $5^{x^2+3x+1,5}<5\sqrt{5}$; 4) $0{,}2^{x^2-6x+7}\geqslant 1$.

Вычислить (400—401).

400. 1) $\log_{27}729$; 2) $\log_9 729$; 3) $\log_{\frac{1}{3}}729$;

4) $\log_{\frac{5}{2}}\frac{2}{5}$; 5) $\log_{\frac{5}{2}}\frac{4}{25}$; 6) $\log_{\frac{5}{2}}\frac{8}{125}$.

401. 1) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[5]{64}$; 2) $\log_8 \log_4 \log_2 16$; 3) $2^{\log_2 16}$;

4) $3^{\log_3 \frac{1}{9}}$; 5) $25^{-\log_5 2}$; 6) $64^{0{,}5 \log_2 10}$.

Решить уравнение **(402—403)**.

402. 1) $5 \log_2 x = 3 \log_2 x + 6$;

2) $5 \log_5 x - 3 \log_3 9 = 2 \log_5 x$;

3) $(\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x + 2 = 0$;

4) $(\log_3 x)^2 + 5 = 2 \log_3 x^3$.

403. 1) $\log_3 (x+1) + \log_3 (x+3) = 1$;

2) $\lg (1-3x) - \lg (x+5) = \lg 5$;

3) $\ln \frac{2}{x+1} = \ln (x+2)$;

4) $\log_3 \sqrt{3x-6} - \log_3 \sqrt{x-3} = 1$.

Решить неравенство **(404—405)**.

404. 1) $\log_{\frac{1}{3}} (5x-1) > 0$;

2) $\log_5 (3x-1) < 1$;

3) $\log_{0,5} (1+2x) > -1$;

4) $\log_3 (1-2x) < -1$.

405. 1) $\log_{0,5} (x^2-5x+6) > -1$;

2) $\log_8 (x^2-4x+3) \leqslant 1$;

3) $\log_{0,5} (3x-4) < \log_{0,5} (x-2)$;

4) $\log_{0,5} (4-x) \geqslant \log_{0,5} 2 - \log_{0,5} (x-1)$.

406. Решить графически уравнение:

1) $0{,}5^x = 2x+1$; 2) $2^x = 3-x^2$; 3) $\log_3 x = 4-x$;

4) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4x^2$; 5) $2^x = \log_{0,5} x$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_3 x$.

407. Вычислить:

1) $2 \operatorname{arctg} 1 - 3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $8 \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

3) $3 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $12 \operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) + 4 \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение (408—414).

408. 1) $\sin 2x=\frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $3\cos x-2=0$; 4) $2\operatorname{tg} x+5=0$.

409. 1) $3\sin^2 x+2\sin x-8=0$;
2) $3\cos^2 x-5\cos x-12=0$;
3) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x=2+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x$;
4) $3\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+5=0$.

410. 1) $(3-4\sin x)(3+4\cos x)=0$;
2) $(2+5\sin x)(3-5\cos x)=0$;
3) $(\operatorname{tg} x-5)(\operatorname{tg} x+\sqrt{3})=0$;
4) $(\operatorname{tg} x+3)(\operatorname{tg} x+1)=0$.

411. 1) $\sin 2x=3\sin x\cos^2 x$; 2) $\sin 4x=\sin 2x$;
3) $\cos 2x+\cos^2 x=0$; 4) $\sin 2x=\cos^2 x$.

412. 1) $\cos x+\cos 2x=0$; 2) $\cos x-\cos 5x=0$;
3) $\sin 3x+\sin x=2\sin 2x$; 4) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

413. 1) $2\cos x+\sin x=0$; 2) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$;
3) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$; 4) $\sqrt{2}\cos x-2\sin x=0$.

414. 1) $\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x=\cos 2x$;
2) $\cos^4 x-\sin^4 x-\sin x=2\cos^2 x$;
3) $\sin^4 x-2\sin^2 x-\sin x=\cos^4 x$;
4) $2\sin^2 x-\cos^4 x=1-\sin^4 x$.

415. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 2) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$;

3) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; 4) $\dfrac{\sin\alpha+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}$;

5) $\dfrac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$; 6) $\dfrac{\left(\cos\frac{3}{4}\alpha-\sin\frac{3}{4}\alpha\right)^2}{1-\sin\frac{3}{2}\alpha}$.

416. Используя графики синуса или косинуса, найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 3\pi]$:

1) $\cos x=-\frac{1}{2}$; 2) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

417. Найти область определения функции:

1) $y=2^x+\lg(6-3x)$; 2) $y=3^{-x}-2\ln(2x+4)$;

3) $y=\frac{1}{\cos 2x}$; 4) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{4}$.

418. Построить график функции:

1) $y=2^{x-1}-3$; 2) $y=\log_2(x+2)+3$;

3) $y=3\sin x-2$; 4) $y=2+\cos 2x$.

419. Выяснить, является ли четной или нечетной функция:

1) $y=2^x+2^{-x}$; 2) $y=3^x-3^{-x}$;

3) $y=\ln\frac{3+x}{3-x}$; 4) $y=\left|\ln\frac{5+x}{5-x}\right|$.

Решить уравнение (**420—422**).

420. 1) $4^{\sqrt{2x-4}}=64\cdot 2^{\sqrt{2x-4}}$; 2) $\sqrt{4^{x(x-1)-\frac{1}{2}}}=\sqrt[4]{2}$;

3) $7\cdot 4^{x^2}-9\cdot 14^{x^2}+2\cdot 49^{x^2}=0$;

4) $5^{x+4}+3\cdot 4^{x+3}=4^{x+4}+4\cdot 5^{x+3}$.

421. 1) $\log_4(2+\sqrt{x+3})=1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2-2x}=-\frac{1}{2}$;

3) $\frac{1}{2}\log_3(x-2)=\log_3\sqrt{x+1}-\log_3 2$;

4) $\frac{1}{2}\log_3(x+1)=\log_3\sqrt{x+4}-2\log_3\sqrt{2}$.

422. 1) $x^{1+\lg x}=10x$; 2) $x^{\lg x}=100x$;

3) $4^{1+\lg x}-6^{\lg x}-2\cdot 3^{2+\lg x^2}=0$;

4) $5^{1+\log_4 x}+0{,}2\cdot 5^{\log_{\frac{1}{4}} x}=5{,}2$;

5) $\log_2(17-2^x)+\log_2(2^x+15)=8$;

6) $\log_2(3+2^x)+\log_2(5-2^x)=4$.

Решить неравенство (**423—425**).

423. 1) $3{,}3^{x^2+6x}<1$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-x^2}>\frac{1}{2}$;

3) $16^{\frac{2x+1}{3x-7}}-64^{\frac{1}{3}}(0{,}25)^{-2}>0$;

4) $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}}<1$;

5) $2^{2x+1}-21\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}+2\geqslant 0$;

6) $3^{4-3x}-35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x}+6\geqslant 0$.

424. 1) $(x^2-4)\log_{0,5} x>0$; 2) $(3x-1)\log_2 x>0$;

3) $\dfrac{2-3x}{\log_{\frac{1}{3}} x}<0$; 4) $(1-x^2)\log_3 x<0$.

425. 1) $x^{1+\lg x}<0{,}1^{-2}$; 2) $\sqrt{x^{4\lg x}}<10x$;

3) $x+3>\log_3(26+3^x)$; 4) $3-x<\log_5(20+5^x)$.

Решить систему уравнений (**426—427**).

426. 1) $\begin{cases}2^{x+y}=32,\\ 3^{3y-x}=27;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^x-2^{2y}=77,\\ 3^{\frac{x}{2}}-2^y=7;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576,\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\lg x+\lg y=4,\\ x^{\lg y}=1000.\end{cases}$

427. 1) $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0,\\ x^2-5y^2+4=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972,\\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{15};\\ \log_3 x+\log_3 y=1+\log_3 5;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2+y^4=16,\\ \log_2 x+2\log_2 y=3.\end{cases}$

428. Между какими целыми числами заключено число:

1) $\lg 50$; 2) $\log_2 10$?

Вычислить (**429—431**).

429. 1) $\log_4 \sin\frac{\pi}{4}$; 2) $\log_{10}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\log_8 \sin\frac{3}{4}\pi$; 4) $\log_2 \cos\frac{1}{3}\pi$;

5) $\log_2 \sin\frac{\pi}{2}-\log_{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

6) $\log_3 1-\log_4 \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\log_5\cos 0$.

430. 1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}\sqrt{3})$; 2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 1)$; 3) $\sin(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$;

4) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 5) $\cos(\operatorname{arctg} 1)$; 6) $\cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$.

431. 1) $\cos\left(6\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\cos\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$;

3) $\sin\left(4\arccos\frac{1}{2}\right)$; 4) $\sin(5\arccos 0)$;

5) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение (432—438).

432. 1) $4\sin^4 x+\sin^2 2x=2$; 2) $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}$.

433. 1) $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{3}$; 2) $6\sin x+5\cos x=6$.

434. 1) $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x-2=0$; 2) $1-\cos x=\operatorname{tg} x-\sin x$.

435. 1) $\sin x+\sin 2x=\cos x+2\cos^2 x$;

2) $2\cos 2x=\sqrt{6}(\cos x-\sin x)$.

436. 1) $2-\operatorname{tg} 2x=\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$;

2) $\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=\cos x+\sin x$.

437. 1) $4\sin^2 x-8\sin x\cos x+10\cos^2 x=3$;

2) $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2$;

3) $2\sin x\cos x+5\cos^2 x=4$;

4) $3\sin^2 x-2\sin x\cos x=1$.

438. 1) $\cos x\sin 9x=\cos 3x\sin 7x$;

2) $\sin x\cos 5x=\sin 9x\cos 3x$;

3) $\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}$;

4) $\cos x\cos 3x=-\frac{1}{2}$.

439. Используя графики тригонометрических функций, найти все решения неравенства, заключенные в промежутке $[-3\pi;\ \pi]$:

1) $2\cos x-\sqrt{3}<0$; 2) $\sqrt{2}\sin x+1\geqslant 0$;

3) $\sqrt{3}+\operatorname{tg} x\leqslant 0$; 4) $3\operatorname{tg} x-2>0$.

440. Выяснить, является ли функция четной или нечетной:

1) $y=x\sin x$; 2) $y=x^2\cos 2x$;

3) $y=x+\sin x$; 4) $y=x+\cos x$.

441. Найти наименьший положительный период периодической функции:

1) $y=\cos 3x$; 2) $y=\sin\frac{x}{5}$;

3) $y=\operatorname{tg} 5x$; 4) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$.

442. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$; 2) $y=2\cos 2x+\sin^2 x$.

443. Решить графически уравнение:

1) $\cos x=3x-1$; 2) $\sin x=0{,}5x^3$;

3) $\cos x=\sqrt{x}$; 4) $\cos x=x^2$.

444. Построить график функции:

1) $y=|\cos x|$; 2) $y=|\sin x|$;

3) $y=|\operatorname{tg} x|$; 4) $y=\sin|x|$.

Упростить выражение (445—447).

445. 1) $\frac{\cos 4\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha \sin \alpha}$; 2) $\frac{1+\cos \alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos \alpha+2\cos^2 \alpha-1}$.

446. 1) $\frac{4\sin^2 \alpha-\sin^2 2\alpha}{4-4\sin^2 \alpha-\sin^2 2\alpha}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha \operatorname{tg}^2 \alpha-1}{\operatorname{tg}^2 \alpha-\operatorname{tg}^2 2\alpha}$.

447. 1) $\frac{\sqrt{2}-\cos x-\sin x}{\sin x-\cos x}$; 2) $\frac{1+\cos x+\sin x+\operatorname{tg} x}{\sin x+\cos x}$.

448*. Вычислить:

1) $\frac{3\sin^2 \alpha+12\sin \alpha \cos \alpha+\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha+\sin \alpha \cos \alpha-2\cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha=2$;

2) $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha-\cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{ctg} \alpha=\frac{3}{4}$.

Доказать тождество (449—450).

449*. 1) $\frac{1-2\sin^2 \alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg} \alpha}{1+\operatorname{tg} \alpha}$;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$;

3) $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

4) $\frac{1}{4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}=1+\frac{(1-\operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2 \alpha}$.

450*. 1) $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=4\cos \frac{x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \frac{3}{2}x$;

2) $4\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin 3x$;

3) $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}=\frac{1}{8}$;

4) $\cos 3x \cos 6x \cos 12x=\frac{\sin 24x}{8\sin 3x}$.

451*. Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt{\log_{0,8}(x^2-5x+7)}$; 2) $y=\sqrt{\log_{0,5}(x^2-9)}$;

3) $y=\sqrt{\log_{0,7}\frac{x-1}{x+5}}$; 4) $y=\sqrt{\log_{0,4}(x-x^2)}$.

452.** Доказать, что $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$, $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Вычислить:

1) $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$.

453.** Доказать, что при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ сумма $\arcsin x+\arccos x=C$, где C — постоянная; найти C.

Решить уравнение (454—456).

454.** 1) $16^{\sin^2 x}+16^{\cos^2 x}=10$;

2) $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x+(\sqrt{3-\sqrt{8}})^x=34$.

455.** 1) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x=2\operatorname{ctg} 4x$;

2) $\dfrac{\sin 4x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$.

456.** 1) $\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}+\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}=\dfrac{2}{\sin 3x}$;

2) $\operatorname{tg} 2x+\operatorname{ctg} x=8\cos^2 x$.

457.** Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2^x\cdot 8^{-y}=2\sqrt{2}, \\ \log_9\dfrac{1}{x}+0{,}5=\dfrac{1}{2}\log_3 9y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^{\log_x 2}=y^{\log_8 y}, \\ 2^{\log_y 3}=x^{\log_7 x}. \end{cases}$

458.** Решить неравенство:

1) $x^{\lg^2 x-3\lg x+1}>1000$;

2) $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2$;

3) $\dfrac{4^x+2x-4}{x-1}\leqslant 2$;

4) $\dfrac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1}<2$;

5) $3\sin x>2\cos^2 x$;

6) $\sin^2 x+2\sin x>0$.

459.** Нарисовать эскиз графика функции:

1) $y=\arcsin x$;

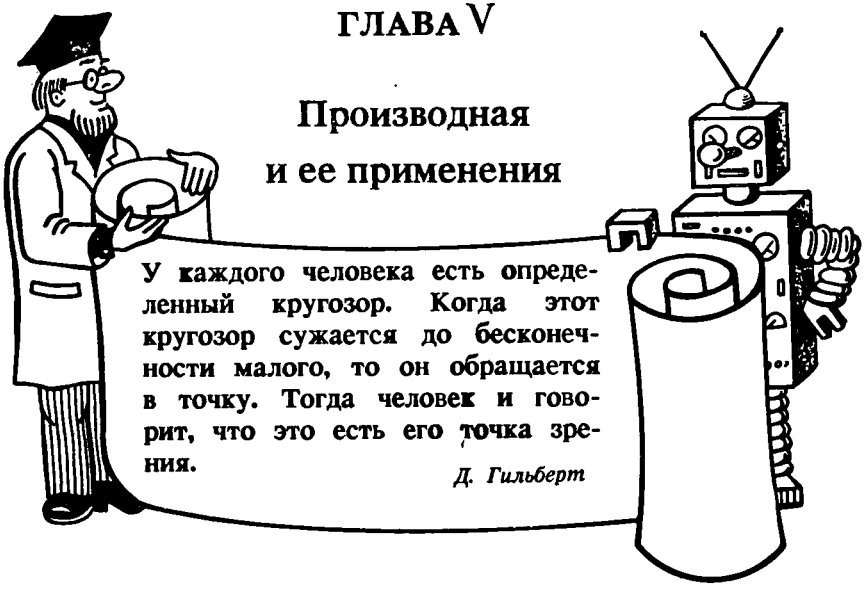
2) $y=\arccos x$;

3) $y=\dfrac{1}{\sin x}$;

4) $y=\dfrac{1}{\log_2 x}$;

5) $y=|x-1|+|x+2|$;

6) $y=|x+3|-|x-1|$.



ГЛАВА V

Производная и ее применения

У каждого человека есть определенный кругозор. Когда этот кругозор сужается до бесконечности малого, то он обращается в точку. Тогда человек и говорит, что это есть его точка зрения.

Д. Гильберт

§ 22. ПРОИЗВОДНАЯ

З а д а ч а 1. На станции метро расстояние от тормозной отметки до остановки первого вагона равно 80 м. С какой скоростью поезд метро должен подойти к тормозной отметке, если дальше он двигается равнозамедленно с ускорением 1,6 м/с^2?

△ Для решения задачи нужно найти скорость движения поезда в момент прохождения тормозной отметки, т. е. мгновенную скорость в этот момент времени. Тормозной путь вычисляется по формуле $s=\frac{at^2}{2}$, где a — ускорение, t — время торможения. В данном случае $s=80$, $a=1{,}6$, поэтому $80=0{,}8t^2$, откуда $t=10$ с. По формуле $v=at$ находим мгновенную скорость $v=1{,}6\cdot 10=16$, т. е. $v=16$ м/с. ▲

От мгновенной скорости зависит решение многих практических задач. Например, от скорости вхождения в воду спортсмена, прыгающего с вышки, зависит глубина его погружения; от скорости запуска спутника зависит выход его на заданную орбиту. При нахождении мгновенной скорости используется средняя скорость движения за малый промежуток времени. Рассмотрим, *как связаны между собой средняя и мгновенная скорости движения.*

Гильберт Давид (1862—1943) — немецкий математик. Труды Гильберта оказали большое влияние на развитие многих разделов математики (теория чисел, математическая логика, дифференциальное и интегральное исчисления, математическая физика и др.).

Пусть точка движется вдоль прямой и за время t от начала движения проходит путь $s(t)$, т. е. задана функция $s(t)$.

Зафиксируем какой-нибудь момент времени t и рассмотрим промежуток времени от t до $t+h$, где h — малое число. За время от t до $t+h$ точка прошла путь длиной

$$s(t+h)-s(t).$$

Средняя скорость движения точки за этот промежуток времени равна отношению

$$v_{ср}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Из курса физики известно, что при уменьшении h это отношение приближается к некоторому числу, которое называется *мгновенной скоростью* в момент времени t и обозначается $v(t)$. Число $v(t)$ называют *пределом* данного отношения при h, стремящемся к нулю, и записывают так:

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Это равенство означает, что отношение $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ можно рассматривать как приближенное значение мгновенной скорости $v(t)$. Если h, уменьшаясь, стремится к нулю, то погрешность приближения становится сколь угодно малой, т. е. также стремится к нулю.

Например, если $s(t)=3t^2$, то

$$v_{ср}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=\frac{3(t+h)^2-3t^2}{h}=\frac{6th+3h^2}{h}=6t+3h.$$

Если $h\to 0$, то $6t+3h\to 6t$, т. е. $v_{ср}\to v(t)=6t$.

Отношение $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ называют *разностным отношением*, а его предел при $h\to 0$ называют *производной функции* $s(t)$ и обозначают $s'(t)$ (читается: «Эс штрих от тэ»).

Вообще пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x — точка этого промежутка и число $h\neq 0$ такое, что $x+h$ также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h\to 0$ (если этот предел существует) называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x и обозначается $f'(x)$ (читается: «Эф штрих от икс»). Таким образом,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \qquad (1)$$

Отметим, что в формуле (1) число h, где $h \neq 0$, может быть как положительным, так и отрицательным, при этом число $x+h$ должно принадлежать промежутку, на котором определена функция $f(x)$.

Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x, то эта функция называется *дифференцируемой в этой точке*. Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что эта функция имеет *производную на этом промежутке*. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Задача 2. Найти производную функции $f(x)=x^2$.

△ Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h.$$

Если $h \to 0$, то $2x+h \to 2x$, поэтому $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x+h) = 2x$. Следовательно, $(x^2)' = 2x$. ▲

Задача 3. Найти производную функции $f(x)=x^3$.

△ Найдем сначала разность $f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-x^3 = x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3 = h(3x^2+3xh+h^2)$.

Составим теперь разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = 3x^2+3xh+h^2.$$

Если $h \to 0$, то $h^2 \to 0$ и $3xh \to 0$, поэтому $3x^2+3xh+h^2 \to 3x^2$. Следовательно, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2$, т. е. $(x^3)' = 3x^2$. ▲

Задача 4. Найти производную функции $f(x)=C$, где C — заданное число.

△ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{C-C}{h} = 0.$

Так как разностное отношение равно нулю при любом $h \neq 0$, т. е. его значение не меняется при $h \to 0$, то предел этого отношения также равен нулю. Таким образом, *производная постоянной равна нулю*: $(C)' = 0$. ▲

Задача 5. Найти производную линейной функции $f(x) = kx+b$.

△ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k(x+h)+b-(kx+b)}{h} = \frac{kh}{h} = k.$

Так как разностное отношение равно k при любом $h \neq 0$, то и предел этого отношения при $h \to 0$ также равен k. Следовательно, $(kx+b)'=k$. ▲

Применяя формулу

$$\boxed{(kx+b)'=k,}$$

например, получаем $(3x+7)'=3$; $(-2x+1)'=-2$; $(5x)'=5$; $(x)'=1$.

Изучение теории пределов не входит в программу средней школы. Поэтому мы не рассматриваем строгое определение предела разностного отношения и его свойства. По этой же причине в курсе математики средней школы некоторые формулы для производных строго не доказываются или вообще принимаются без доказательства.

При нахождении производных простейших функций мы пользуемся наглядными представлениями. Например, мы считаем наглядно понятным, что если $h \to 0$, то и $5h \to 0$, $h^2 \to 0$, $5-3h \to 5$ и т. п.

Упражнения

460. Используя определение производной, найти $f'(x)$, если:
1) $f(x)=3x+2$; 2) $f(x)=5x+7$;
3) $f(x)=3x^2-5x$; 4) $f(x)=-3x^2+2$.

461. С помощью формулы $(kx+b)'=k$ найти производную функции:
1) $f(x)=2x$; 2) $f(x)=4x$;
3) $f(x)=-7x+5$; 4) $f(x)=-5x-7$.

462. Точка движется по закону $s(t)=1+3t$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени:
1) от $t=1$ до $t=4$; 2) от $t=0{,}8$ до $t=1$.

463. Найти мгновенную скорость движения точки, если:
1) $s(t)=2t+1$; 2) $s(t)=2-3t$.

464. Закон движения задан формулой $s(t)=0{,}25t+2$. Найти:
1) среднюю скорость движения от $t=4$ до $t=8$;
2) скорость движения в моменты $t=4$ и $t=8$.

---

465. Найти мгновенную скорость движения точки, если закон ее движения $s(t)$ задан формулой:
1) $s(t)=\frac{3}{2}t^2$; 2) $s(t)=5t^2$.

466. Определить скорость тела, движущегося по закону $s(t)=t^2+2$ в момент времени:
1) $t=5$; 2) $t=10$.

Задача 1. Доказать, что $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

△ Пусть $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$. Тогда

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}=-\frac{h}{(x+h)x},$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{1}{(x+h)x}.$$

Если $h\to 0$, то $x+h\to x$, и поэтому знаменатель дроби стремится к x^2. Следовательно, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$. При этом предполагалось, что если $x>0$, то и $x+h>0$, а если $x<0$, то и $x+h<0$.

Таким образом, формула $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ справедлива при $x\neq 0$. ▲

Задача 2. Доказать, что $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

△ Пусть $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$, $x+h>0$. Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Умножим числитель и знаменатель на сумму $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$. Получим:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

Если $h\to 0$, то $\sqrt{x+h}$ стремится к $\sqrt{x}$, поэтому знаменатель последней дроби стремится к $2\sqrt{x}$. Следовательно, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Таким образом, формула $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ справедлива при $x>0$. ▲

Итак, в этом и предыдущем параграфе получены следующие формулы для производных:

$$(C)'=0;\ (x)'=1,\ (x^2)'=2x;$$
$$(x^3)'=3x^2;\ \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},\ x\neq 0;\ (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0.$$

Четыре последние формулы являются формулами производной степенной функции $f(x)=x^p$ для $p=2;\ 3;\ -1;\ \frac{1}{2}$. Их можно записать так:

$$(x^2)'=2x^{2-1},\quad (x^3)'=3x^{3-1},\quad (x^{-1})'=(-1)x^{-1-1},\quad (x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}.$$

Вообще справедлива *формула производной степенной функции* для любого действительного показателя:

$$(x^p)'=px^{p-1}. \qquad (1)$$

Эта формула справедлива при тех значениях x, при которых правая часть формулы (1) имеет смысл.

Например, $(x^5)'=5x^4$; $(x^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; $(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$; $(x^{\sqrt{2}})'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$.

Задача 3. Вычислить $f'(9)$, если $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

△ $f'(x)=(x^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$; $f'(9)=-\frac{1}{2}9^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{54}$. ▲

Пользуясь формулами $(x^p)'=px^{p-1}$ и $(kx+b)'=k$, можно найти производные степенной и линейной функции, например $(x^7)'=7x^6$, $(3x-1)'=3$. В более сложных случаях, например при нахождении производной функции $(3x-1)^7$, можно воспользоваться следующей формулой:

$$((kx+b)^p)'=pk(kx+b)^{p-1}. \qquad (2)$$

Применяя формулу (2) при $k=3$, $b=-1$, $p=7$, получаем $((3x-1)^7)'=21(3x-1)^6$.

Задача 4. Вычислить $f'(-3)$, если $f(x)=\sqrt{4-7x}$.

△ Запишем данную функцию так: $f(x)=(-7x+4)^{\frac{1}{2}}$. По формуле (2) находим $f'(x)=-\frac{7}{2}(-7x+4)^{-\frac{1}{2}}$. При $x=-3$ получаем $f'(-3)=-\frac{7}{2}25^{-\frac{1}{2}}=-0{,}7$. ▲

Задача 5*. Доказать, что $(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ на промежутке: 1) $x>0$; 2) $x<0$.

△ 1) Если $x>0$, то $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ и по формуле (1) получаем

$$(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

2) Если $x<0$, то $\sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{(-x)}=-(-x)^{\frac{1}{3}}$ и по формуле (2) получаем $(\sqrt[3]{x})'=(-1)\cdot\frac{1}{3}(-1)(-x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. ▲

Упражнения

Найти производную функции (467—472).

467. 1) x^6; 2) x^7; 3) x^{11}; 4) x^{13}.

468. 1) x^{-2}; 2) x^{-3}; 3) x^{-4}; 4) x^{-7}.

469. 1) $x^{\frac{1}{2}}$; 2) $x^{\frac{1}{3}}$; 3) $x^{-\frac{2}{7}}$; 4) $x^{\sqrt{3}}$.

470. 1) $\frac{1}{x^5}$; 2) $\frac{1}{x^9}$; 3) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

471. 1) $(4x-3)^2$; 2) $(5x+2)^{-3}$; 3) $(1-2x)^{-6}$; 4) $(2-5x)^4$; 5) $(2x)^3$; 6) $(-5x)^4$.

472. 1) $\sqrt[3]{2x+7}$; 2) $\sqrt[4]{7-3x}$; 3) $\sqrt[4]{3x}$; 4) $\sqrt[3]{5x}$.

473. Найти $f'(x_0)$, если:

1) $f(x)=x^6$, $x_0=\frac{1}{2}$; 2) $f(x)=x^{-2}$, $x_0=3$;

3) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$; 4) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=8$;

5) $f(x)=\sqrt{5-4x}$, $x_0=1$; 6) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$, $x_0=1$.

474. Найти производную функции:

1) $\frac{1}{(2+3x)^2}$; 2) $\frac{1}{(3-2x)^3}$; 3) $\sqrt[3]{(3x-2)^2}$;

4) $\sqrt[7]{(3-14x)^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3x-7}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

475. При каких значениях x производная функции $f(x)$ равна 1, если:

1) $f(x)=x^3$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$?

476. Найти мгновенную скорость тела, движущегося по закону $s(t)=\sqrt{t+1}$, в момент времени $t=3$.

477*. Найти производную функции:

1) $16x^4$; 2) $4x^2+12x+9$.

§ 24. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

При вычислении производной полезными являются следующие правила дифференцирования:

1. *Производная суммы равна сумме производных*:

$$\boxed{(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).} \qquad (1)$$

Подробно это свойство производной формулируется так: если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет производную, то их сумма также имеет производную и справедлива формула (1).

○* Обозначим $f(x)+g(x)=F(x)$. Тогда $F(x+h)-F(x)=f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)$. Поэтому разностное отношение равно

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

При $h\to 0$ первая дробь в правой части имеет предел, равный $f'(x)$, вторая дробь имеет предел, равный $g'(x)$. Поэтому левая часть имеет предел, равный $F'(x)=f'(x)+g'(x)$, т. е. справедливо равенство (1).

Аналогично доказывается, что *производная суммы нескольких функций* равна сумме производных этих функций; *производная разности* равна разности производных.

Задача 1. Найти производную функции:

1) $f(x)=x^3-x^2+x-3$;

2) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

△ 1) $f'(x)=(x^3)'-(x^2)'+(x)'-(3)'=3x^2-2x+1$.

2) $f'(x)=(x^{\frac{1}{2}})'-(x^{-\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. ▲

2. *Постоянный множитель можно вынести за знак производной:*

$$\boxed{(cf(x))'=cf'(x).} \qquad (2)$$

○* Обозначим $cf(x)=F(x)$, тогда

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=c\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

откуда при $h\to 0$ получаем $F'(x)=cf'(x)$. ●

Задача 2. Вычислить $f'(-2)$, если $f(x)=\frac{1}{4}x^5-3x^3+7x-17$.

△ $f'(x)=\left(\frac{1}{4}x^5\right)'-(3x^3)'+(7x)'-(17)'=\frac{1}{4}(x^5)'-3(x^3)'+7(x)'=$

$=\frac{5}{4}x^4-9x^2+7$; $f'(-2)=\frac{5}{4}(-2)^4-9(-2)^2+7=-9$. ▲

Приведем без доказательства формулы производной произведения и частного.

3. *Производная произведения:*

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x). \qquad (3)$$

Задача 3. Проверить справедливость формулы (3), если $f(x)=3x^2-5$, $g(x)=2x+7$.

△ В левой части формулы (3) получаем $(f(x)\cdot g(x))'=$
$=((3x^2-5)(2x+7))'=(6x^3+21x^2-10x-35)'=18x^2+42x-10$.

В правой части формулы (3) получаем $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=$
$=(3x^2-5)'\cdot(2x+7)+(3x^2-5)\cdot(2x+7)'=6x(2x+7)+(3x^2-5)2=$
$=18x^2+42x-10$. ▲

Задача 4. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)=(x-1)^9(x+2)^6$ равно нулю.

△ По формуле (3) получаем $f'(x)=9(x-1)^8(x+2)^6+$
$+6(x-1)^9(x+2)^5=3(x-1)^8(x+2)^5(3x+6+2x-2)=$
$=3(x-1)^8(x+2)^5(5x+4)$.

Решая уравнение $3(x-1)^8(x+2)^5(5x+4)=0$, находим: $f'(x)=0$ при $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=-0{,}8$. ▲

4. *Производная частного:*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}. \qquad (4)$$

Задача 5. Найти производную функции $F(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$.

△ Обозначим $x^3=f(x)$, $x^2+1=g(x)$. По формуле (4) находим:

$$F'(x)=\frac{(x^3)'(x^2+1)-x^3(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^2(x^2+1)-x^3 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}. \text{ ▲}$$

З а д а ч а 6. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$: 1) положительно; 2) отрицательно.

△ По формуле (4) получаем $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+3)^2}$.

1) Решая неравенство $\frac{-2x}{(x^2+3)^2}>0$, находим: $f'(x)>0$ при $x<0$.

2) Решая неравенство $\frac{-2x}{(x^2+3)^2}<0$, находим: $f'(x)<0$ при $x>0$. ▲

Упражнения

Найти производную функции (**478—480**).

478. 1) x^2+x; 2) x^2-x; 3) $3x^2$; 4) $-17x^2$;
5) $-4x^3$; 6) $0{,}5x^3$; 7) $13x^2+26$; 8) $8x^2-16$.

479. 1) $3x^2-5x+6$; 2) $5x^2+6x-7$; 3) x^4+2x^2;
4) x^5-3x^2; 5) x^3+5x; 6) $-2x^3+18x$;
7) $2x^3-3x^2+6x+1$; 8) $-3x^3+2x^2-x-5$.

480. 1) $x^2+\frac{1}{x^3}$; 2) $x^3+\frac{1}{x^2}$; 3) $2\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x}+7\sqrt[4]{x}$.

481. Найти $f'(0)$ и $f'(2)$, если:
1) $f(x)=x^2-2x+1$; 2) $f(x)=x^3-2x$;
3) $f(x)=-x^3+x^2$; 4) $f(x)=x^2+x+1$.

482. Найти $f'(3)$ и $f'(1)$, если:
1) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}+1$;
3) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^3}$; 4) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$.

483. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0, если:
1) $f(x)=x^3-2x$; 2) $f(x)=-x^2+3x+1$;
3) $f(x)=2x^3+3x^2-12x-3$; 4) $f(x)=x^3+2x^2-7x+1$;
5) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$; 6) $f(x)=x^4+4x^3-8x^2-5$.

484. Найти производную функции:
1) $(x-2)^2\cdot x^3$; 2) $(x^2-x)(x^3+x)$; 3) $(x+2)\cdot\sqrt[3]{x}$;
4) $(x-1)\sqrt{x}$.

485. Найти $f'(1)$, если:
1) $f(x)=(x-1)^8(2-x)^7$; 2) $f(x)=(2x-1)^5(1+x)^4$;
3) $f(x)=\sqrt{2-x}\cdot(3-2x)^8$; 4) $f(x)=(5x-4)^6\cdot\sqrt{3x-2}$.

486. При каких значениях x значение производной функции $y=(x-3)^5(2+5x)^6$ равно 0?

487. Найти производную функции:
1) $\frac{x^5+x^3+x}{x+1}$; 2) $\frac{\sqrt{x}+x^2+1}{x-1}$.

488. Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$; 2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$;

3) $f(x)=\frac{2x-3}{5-4x}$; 4) $f(x)=\frac{2x^2}{1-7x}$.

Найти производную функции (489—492).

489. 1) $\frac{x^4+x^3+81}{x^2}$; 2) $\frac{x^3+x^2+16}{x}$; 3) $\frac{x\sqrt{x}+x^2+3}{\sqrt{x}}$; 4) $\frac{x^3\sqrt[3]{x}+3x+18}{\sqrt[3]{x}}$.

490. 1) $(x+2)\sqrt[3]{x}$; 2) $\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$;

3) $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.

491. 1) $(2x-3)^5(3x^2+2x+1)$; 2) $(x-1)^4(x+1)^7$;

3) $\sqrt[4]{3x+2}\,(3x-1)^4$; 4) $\sqrt[3]{2x+1}\cdot(2x-3)^3$.

492. 1) $\frac{2x^2-3x+1}{x+1}$; 2) $\frac{3x^2+2x-1}{2x+1}$;

3) $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{1}{x}$; 4) $\frac{2-x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2-x}$.

493. Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает положительные значения:

1) $f(x)=x^4-4x^2+1$; 2) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+3$;

3) $f(x)=(x+2)^2\sqrt{x}$; 4) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$.

494. Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает отрицательные значения:

1) $(5-3x)^4(3x-1)^3$; 2) $(2x-3)^2(3-2x)^3$;

3) $\frac{3x^2-1}{1-2x}$; 4) $\frac{3x^3}{1-3x}$.

495. Угол поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t)=0{,}1t^2-0{,}5t+0{,}2$. Найти угловую скорость (в рад/с) вращения тела в момент времени $t=20$ с.

496*. Тело, масса которого $m=5$ кг, движется прямолинейно по закону $s=1-t+t^2$ (где s измеряется в метрах, t — в секундах). Найти кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 10 с после начала движения.

497.** В тонком неоднородном стержне длиной 25 см его масса (в г) распределена по закону $m=2l^2+3l$, где l — длина стержня, отсчитываемая от его начала. Найти линейную плотность в точке: 1) отстоящей от начала стержня на 3 см; 2) в конце стержня.

498.** Найти производную функции $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ при $x<2$ и при $x>3$.

§ 25. ПРОИЗВОДНЫЕ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Элементарными функциями называют степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации. При решении многих практических задач часто приходится находить производные таких функций.

Например, напряжение в цепи переменного тока выражается формулой $U(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$; для нахождения силы тока $J(t)$ нужно уметь находить производную $U'(t)$, так как $J(t)=U'(t)$.

1. Производная показательной функции

Показательная функция $f(x)=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$, определена на всей числовой прямой и имеет производную в каждой ее точке. Любую показательную функцию можно выразить через показательную функцию с основанием e по формуле

$$a^x=e^{x\ln a}, \tag{1}$$

так как $e^{x\ln a}=(e^{\ln a})^x=a^x$. В курсе высшей математики доказывается, что функция e^x обладает замечательным свойством: ее производная также равна e^x, т. е.

$$\boxed{(e^x)'=e^x.} \tag{2}$$

Можно также доказать, что

$$(e^{kx+b})'=ke^{kx+b}. \tag{3}$$

Например, $(e^{3x+1})'=3e^{3x+1}$; $(e^{-2x-4})'=-2e^{-2x-4}$.

Задача 1. Найти производную функции a^x, где $a>0$, $a\neq 1$.

△ Используя формулы (1) и (3), находим $(a^x)'=(e^{x\ln a})'=$ $=\ln a\cdot e^{x\ln a}=\ln a\cdot a^x$. ▲

Итак,

$$\boxed{(a^x)'=a^x\ln a.} \tag{4}$$

Например, $(3^x)'=3^x\ln 3$, $(0{,}7^x)'=0{,}7^x\ln 0{,}7$.

2*. Производная логарифмической функции

Логарифмическую функцию $\log_a x$ с любым основанием $a>0$, $a\neq 1$ можно выразить через логарифмическую функцию с основанием e с помощью формулы перехода

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}. \tag{5}$$

Производная функции $\ln x$ выражается формулой

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x},\ x>0.} \tag{6}$$

Справедлива также формула

$$(\ln (kx+b))'=\frac{k}{kx+b}. \tag{7}$$

Например, $(\ln (4x-3))'=\frac{4}{4x-3}$, $(\ln (1-2x))'=\frac{-2}{1-2x}=\frac{2}{2x-1}$.

Задача 2. Найти производную функции $\log_a x$, где $a>0$, $a\neq 1$.

△ Используя формулы (5) и (6), находим:

$$(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}(\ln x)'=\frac{1}{x\ln a}. \ ▲$$

Итак,

$$\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.} \tag{8}$$

Например, $(\log_3 x)'=\frac{1}{x\ln 3}$, $(\lg x)'=\frac{1}{x\ln 10}$.

3. Производные тригонометрических функций

Покажем, как можно вывести формулу производной синуса. Обозначим $f(x)=\sin x$, составим разностное отношение

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin (x+h)-\sin x}{h}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Если $h\to 0$, то $x+\frac{h}{2}\to x$ и $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\to\cos x$. Можно доказать, что $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$ при $h\to 0$. В этом можно наглядно убедиться с помощью

микрокалькулятора. Например, при $h=0{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$ дробь $\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ принимает соответственно значения:

$$0{,}9896158;\quad 0{,}99958336;\quad 0{,}9999984;\quad 0{,}99999994.$$

Таким образом, $(\sin x)'=\cos x$.

Аналогично можно убедиться в том, что $(\cos x)'=-\sin x$.

Итак, справедливы формулы

$$(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x. \tag{9}$$

Справедливы также формулы

$$(\sin(kx+b))'=k\cos(kx+b),\ (\cos(kx+b))'=-k\sin(kx+b). \tag{10}$$

Например, $\sin\left(\frac{1}{4}x-1\right)=\frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{4}x-1\right)$, $\cos(3-4x)=$ $=-(-4)\sin(3-4x)=4\sin(3-4x)$.

З а д а ч а 3. Найти производную функции $\operatorname{tg} x$.

△ Используя правило дифференцирования частного и формулы (9), находим $(\operatorname{tg} x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$ $=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. ▲

4. Применение правил дифференцирования и формул для производных к решению задач

Приведем сводную таблицу.

$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x),\ (cf(x))'=cf'(x),$ $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),\ \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$
$(x^p)'=px^{p-1},\ (e^x)'=e^x,\ (\ln x)'=\dfrac{1}{x},$ $(a^x)'=a^x\ln a,\ (\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a},$ $(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x.$

Задача 4. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin(2x+1)-3\cos(1-x)$;

2) $f(x)=e^{-3x}\sin(5x-1)$;

3) $f(x)=\dfrac{\ln 3x}{x+1}$.

△ 1) $f'(x)=2\cos(2x+1)-3\sin(1-x)$;

2) $f'(x)=-3e^{-3x}\sin(5x-1)+5e^{-3x}\cos(5x-1)$;

3) $f'(x)=\dfrac{\frac{3}{3x}(x+1)-1\cdot\ln 3x}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-x\ln 3x}{x(x+1)^2}$. ▲

Задача 5*. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)=x^2-2\ln x$ равно нулю; положительно; отрицательно.

△ Найдем производную $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x^2-1)}{x}$.

Заметим, что равенство $(x^2-2\ln x)'=2x-\dfrac{2}{x}$ справедливо при тех значениях x, при которых обе его части имеют смысл, т. е. при $x>0$.

Выражение $\dfrac{2(x^2-1)}{x}$ равно нулю при $x_{1,2}=\pm 1$, положительно на промежутках $-1<x<0$ и $x>1$, отрицательно на промежутках $x<-1$ и $0<x<1$.

Так как $x>0$, то $f'(x)=0$ только при $x=1$; $f'(x)>0$ при $x>1$, $f'(x)<0$ при $0<x<1$. ▲

Упражнения

Найти производную функции (499—507).

499. 1) e^x+1; 2) e^x+x^2;

3) $e^{2x}+\dfrac{1}{x}$; 4) $e^{-3x}+\sqrt{x}$.

500. 1) $e^{2x+1}+2x^3$; 2) $e^{\frac{1}{2}x-1}-\sqrt{x-1}$;

3) $e^{0,3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $e^{1-x}+x^{-3}$.

501. 1) 2^x+e^x; 2) 3^x-x^{-2};

3) $e^{2x}-x$; 4) $e^{3x}+2x^2$.

502. 1) $0{,}5^x+e^{3x}$; 2) 3^x-e^{2x};

3) $e^{2-x}+\sqrt[3]{x}$; 4) $e^{3-x}+\dfrac{1}{x^4}$.

503. 1) $2\ln x+3^x$; 2) $3\ln x-2^x$;
3) $\log_2 x+\frac{1}{2x}$; 4) $3x^{-3}-\log_3 x$.

504. 1) $\sin x+x^2$; 2) $\cos x-1$;
3) $\cos x+e^x$; 4) $\sin x-2^x$.

505. 1) $\sin(2x-1)$; 2) $\cos(x+2)$;
3) $\cos(1-x)$; 4) $\sin(3-x)$.

506. 1) $\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)+e^{3x}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{3}+3\right)+2^x$;
3) $\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{2x}$; 4) $3\cos 4x-\frac{1}{2x}$.

507. 1) $\frac{\cos x}{e^x}$; 2) $\frac{3^x}{\sin x}$; 3) $\ln x\cdot\cos 3x$; 4) $\log_3 x\cdot\sin 2x$.

508. Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:
1) $f(x)=e^{2x-4}+2\ln x$, $x_0=2$;
2) $f(x)=e^{3x-2}-\ln(3x-1)$, $x_0=\frac{2}{3}$;
3) $f(x)=2^x-\log_2 x$, $x_0=1$;
4) $f(x)=\log_{0,5} x-3^x$, $x_0=1$.

509. Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно 0:
1) $f(x)=x-\cos x$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$;
3) $f(x)=2\ln(x+3)-x$; 4) $f(x)=\ln(x+1)-2x$;
5) $f(x)=x^2+2x-12\ln x$; 6) $f(x)=x^2-6x-8\ln x$.

510. Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ положительно:
1) $f(x)=e^x-x$; 2) $f(x)=x\ln 2-2^x$;
3) $f(x)=e^x\cdot x^2$; 4) $f(x)=e^x\cdot\sqrt{x}$.

Найти производную функции (**511—515**).

511. 1) $\sqrt{\frac{2x-1}{3}}+\ln\frac{2x+3}{5}$; 2) $\sqrt{\frac{1-x}{6}}-2\ln\frac{2-5x}{3}$;
3) $2e^{\frac{1-x}{3}}+3\cos\frac{1-x}{2}$; 4) $3e^{\frac{2-x}{3}}-2\sin\frac{1+x}{4}$.

512. 1) $5\sin\frac{2x+3}{4}-4\sqrt{\frac{1}{x-1}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{3}{2-x}}-3\cos\frac{x-2}{3}$;
3) $6\sqrt[3]{\frac{1}{(2-x)^2}}+4e^{\frac{3-5x}{2}}$; 4) $2\sqrt[4]{\frac{1}{(x+2)^3}}-5e^{\frac{x-4}{5}}$.

513. 1) $0{,}5^x\cdot\cos 2x$; 2) $5\sqrt{x}\cdot e^{-x}$;
3) $\ln(1-3x)\cdot\sin x$; 4) $e^{3-2x}\cdot\cos(3-2x)$.

514. 1) $\frac{1+\cos x}{\sin x}$; 2) $\frac{\sqrt{3x}}{3^x+1}$; 3) $\frac{e^{0,5x}}{\cos 2x-5}$; 4) $\frac{5^{2x}}{\sin 3x+7}$.

515. 1) $\frac{e^x-e^{-x}}{x}$; 2) $\frac{2^x-\log_2 x}{\ln 2\cdot x}$;

3) $\frac{\sin x-\cos x}{x}$; 4) $\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$.

516. Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x)=5(\sin x-\cos x)+\sqrt{2}\cos 5x$;

2) $f(x)=1-5\cos 2x+2(\sin x-\cos x)-2x$.

517*. Найти значения производной функции $f(x)$ в точках, в которых значение этой функции равно нулю:

1) $f(x)=e^{2x}\ln(2x-1)$;

2) $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x}$.

518*. Вычислить $f'(x)+f(x)+2$, если $f(x)=x\sin 2x$, $x=\pi$.

519*. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x)=x-\ln x$; 2) $f(x)=x\ln x$;

3) $f(x)=x^2\ln x$; 4) $f(x)=x^3-3\ln x$.

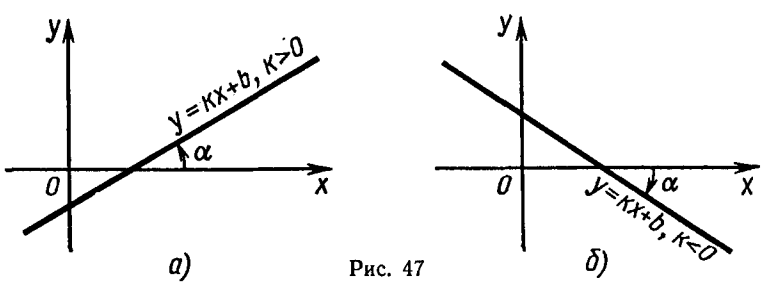
520.** Найти производную функции $\ln(x^2-5x+6)$ при $x<2$ и при $x>3$.

§ 26. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Напомним, что графиком линейной функции $y=kx+b$ является прямая (рис. 47). Число $k=\operatorname{tg}\alpha$ называют *угловым коэффициентом прямой*, а угол α — *углом между* этой *прямой и осью Ox*.

Если $k>0$, то $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (рис. 47, *а*); в этом случае функция $y=kx+b$ возрастает и говорят, что *прямая направлена вверх*.

Если $k<0$, то $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ (рис. 47, *б*); в этом случае функция $y=kx+b$ убывает и говорят, что *прямая направлена вниз*.



а) Рис. 47 *б)*

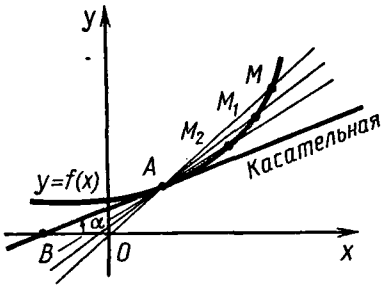


Рис. 48

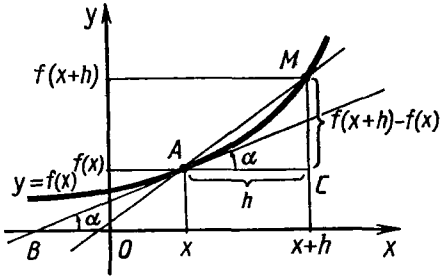


Рис. 49

Выясним геометрический смысл производной дифференцируемой функции $y=f(x)$.

Пусть точки A и M принадлежат графику функции $y=f(x)$ (рис. 48). Если точка A неподвижна, а точка M движется по графику, приближаясь к точке A, то прямая AM приближается к некоторой предельной прямой AB (рис. 48). Эту прямую AB называют *касательной к графику функции* $y=f(x)$ *в точке* A.

Пусть x и $x+h$ — абсциссы точек A и M (рис. 49), тогда их ординаты равны $f(x)$ и $f(x+h)$. Из треугольника ACM (рис. 49) имеем $\operatorname{tg} \angle CAM=\frac{MC}{AC}$ или

$$\operatorname{tg} \angle CAM=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \qquad (1)$$

Если число x фиксировано, а $h \to 0$, то точка A неподвижна, а точка M, двигаясь по графику, стремится к точке A. При этом прямая AM стремится к касательной AB, угол CAM стремится к углу α, и поэтому левая часть формулы (1) стремится к $\operatorname{tg} \alpha$. Правая часть формулы (1) при $h \to 0$ стремится к $f'(x)$. Таким образом, из формулы (1) при $h \to 0$ получаем:

$$\boxed{f'(x)=\operatorname{tg} \alpha.} \qquad (2)$$

Итак, геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

З а д а ч а 1. Найти угол между касательной к графику функции $y=\sin x$ в точке $(0; 0)$ и осью Ox.

△ Найдем угловой коэффициент касательной к кривой $y=\sin x$ в точке $(0; 0)$, т. е. значение производной этой функции при $x=0$.

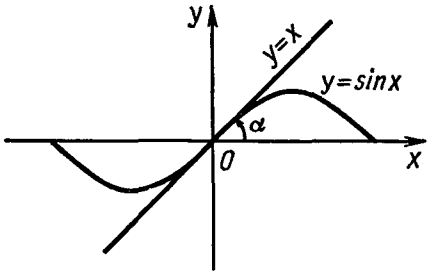


Рис. 50

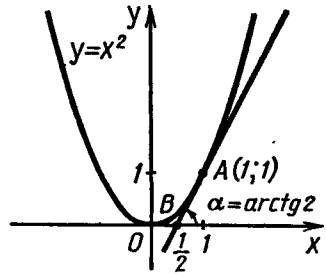


Рис. 51

Производная функции $f(x)=\sin x$ равна $f'(x)=\cos x$. По формуле (2) находим $\operatorname{tg}\alpha=f'(0)=\cos 0=1$, откуда $\alpha=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$ (рис. 50). ▲

Отметим, что это свойство полезно для построения графика $y=\sin x$: в точке (0; 0) синусоида касается прямой $y=x$ (рис. 50).

З а д а ч а 2. Найти угол между касательной к параболе $y=x^2$ в точке (1; 1) и осью Ox и написать уравнение этой касательной.

△ Производная функции $f(x)=x^2$ равна $f'(x)=2x$. По формуле (2) находим $\operatorname{tg}\alpha=f'(1)=2\cdot 1=2$, откуда $\alpha=\operatorname{arctg} 2$ (рис. 51).

Найдем теперь уравнение касательной AB к параболе $y=x^2$ в точке $A(1; 1)$ (рис. 51). Если $y=kx+b$ — уравнение прямой AB, то $k=\operatorname{tg}\alpha=2$, т. е. уравнение касательной имеет вид $y=2x+b$. Подставляя в это уравнение координаты точки (1; 1), получаем $1=2\cdot 1+b$, откуда $b=-1$. Следовательно, $y=2x-1$ — уравнение искомой касательной. ▲

Аналогично тому, как это сделано в задаче 2, выведем уравнение касательной к графику дифференцируемой функции $y=f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ (рис. 52).

Если $y=kx+b$ — искомое уравнение, то по формуле (2) находим $k=\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$, т. е. уравнение касательной имеет вид

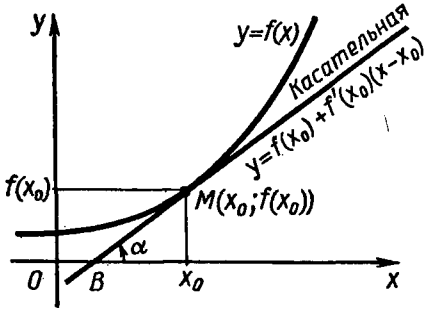


Рис. 52

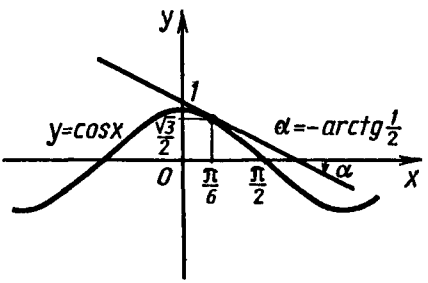


Рис. 53

$y=f'(x_0)\,x+b$. Подставляя в это уравнение координаты точки $(x_0;\ f(x_0))$, получаем $f(x_0)=f'(x_0)\,x_0+b$, откуда $b=f(x_0)-f'(x_0)\,x_0$. Итак, уравнение касательной $y=f'(x_0)\,x+f(x_0)-f'(x_0)\,x_0$ или

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0). \qquad (3)$$

Задача 3. Найти уравнение касательной к графику функции $y=\cos x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{6}$.

△ Значения функции $f(x)=\cos x$ и ее производной в точке $x_0=\frac{\pi}{6}$ равны: $f(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(x_0)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$. Используя формулу (3), найдем искомое уравнение касательной: $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ или $y=-\frac{1}{2}x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$. ▲

Касательная к графику функции $y=\cos x$ в точке $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ изображена на рисунке 53.

Задача 4*. Показать, что касательная к параболе $y=x^2$ в точке с абсциссой x_0 пересекает ось Ox в точке $\frac{x_0}{2}$.

△ Пусть $f(x)=x^2$, тогда $f'(x)=2x$, $f(x_0)=x_0^2$ и $f'(x_0)=2x_0$. По формуле (3) находим уравнение касательной:

$$y=x_0^2+2x_0\,(x-x_0)=2x_0x-x_0^2.$$

Найдем точку пересечения этой касательной с осью абсцисс. Из равенства $2x_0x-x_0^2=0$ находим $x=\frac{x_0}{2}$. ▲

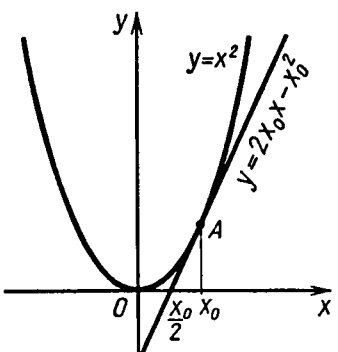


Рис. 54

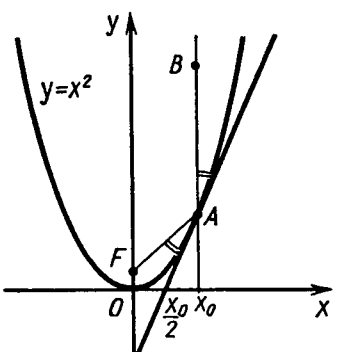


Рис. 55

Отсюда следует простой геометрический *способ построения касательной к параболе* $y=x^2$ в точке A с абсциссой x_0: прямая, проходящая через точку A и точку $\frac{x_0}{2}$ оси абсцисс, касается параболы в точке A (рис. 54).

Построив касательную к параболе, можно построить ее *фокус* F. Напомним, что фокусом является точка, в которую нужно поместить источник света, чтобы все лучи, отраженные от параболического зеркала, были параллельны оси симметрии параболы. *Для построения фокуса* F нужно построить прямую AB, параллельную оси Oy, и прямую AF, образующую с касательной такой же угол, как и прямая AB (рис. 55).

Упражнения

521. Найти значения k и b, если прямая $y=kx+b$ проходит через точку $(x_0; y_0)$ и образует с осью Ox угол α:

1) $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $x_0=2$, $y_0=-3$; 2) $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $x_0=-3$, $y_0=2$;

3) $\alpha=-\frac{\pi}{3}$, $x_0=1$, $y_0=1$; 4) $\alpha=-\frac{\pi}{6}$, $x_0=-1$, $y_0=-1$.

522. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x)=x^3$, $x_0=1$; 2) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

3) $f(x)=\ln x$, $x_0=1$; 4) $f(x)=e^x$, $x_0=\ln 3$.

523. Найти угол между касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox:

1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3$, $x_0=1$; 2) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=1$;

3) $f(x)=2\sqrt{x}$, $x_0=3$; 4) $f(x)=\frac{18}{\sqrt{x}}$, $x_0=3$;

5) $f(x)=e^{\frac{3x+1}{2}}$, $x_0=0$; 6) $f(x)=\ln(2x+1)$, $x_0=2$.

524. Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x)=x^2+x+1$, $x_0=1$; 2) $f(x)=x-3x^2$, $x_0=2$;

3) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=3$; 4) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x_0=-2$;

5) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; 6) $f(x)=e^x$, $x_0=0$;

7) $f(x)=\ln x$, $x_0=1$; 8) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=1$.

525. Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=0$:

1) $f(x)=x-2\sqrt{x+1}$; 2) $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$;

3) $f(x)=e^{2x}+\sin x$; 4) $f(x)=\sin 2x-\ln(x+1)$.

526. Найти угол между осью Oy и касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=0$:

1) $f(x)=x+e^{-x}$; 2) $f(x)=\cos x$;

3) $f(x)=x^2+\sin x$; 4) $f(x)=\sqrt{x+1}+e^{\frac{x}{2}}$.

527*. Под каким углом пересекаются графики функций (*углом между кривыми* в точке их пересечения называют угол между касательными к этим кривым в этой точке):

1) $y=8-x$ и $y=4\sqrt{x+4}$;

2) $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ и $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$;

3) $y=\ln(1+x)$ и $y=\ln(1-x)$;

4) $y=e^x$ и $y=e^{-x}$?

528*. Показать, что графики двух данных функций имеют одну общую точку и в этой точке — общую касательную; написать уравнение этой касательной:

1) $y=x^4$ и $y=x^6+2x^2$; 2) $y=x^4$ и $y=x^3-3x^2$;

3) $y=(x+2)^2$ и $y=2-x^2$; 4) $y=x(2+x)$ и $y=x(2-x)$.

529*. Найти точки графика функции $y=f(x)$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y=kx$:

1) $f(x)=e^x+e^{-x}$, $k=\frac{3}{2}$; 2) $f(x)=\sqrt{3x+1}$, $k=\frac{3}{4}$;

3) $f(x)=\sin 2x$, $k=2$; 4) $f(x)=x+\sin x$, $k=0$.

530.** В каких точках касательная к графику функции $y=\frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол, равный $-\frac{\pi}{4}$?

531.** Найти точки, в которых касательные к кривым $f(x)=x^3-x-1$ и $g(x)=3x^2-4x+1$ параллельны. Написать уравнения этих касательных.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

Найти производную функции (**532—536**).

532. 1) $2x^4-x^3+3x+4$; 2) $-x^5+2x^3-3x^2-1$;

3) $6\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}$; 4) $\frac{2}{x^3}-8\sqrt[4]{x}$; 5) $(2x+3)^8$;

6) $(4-3x)^7$; 7) $\sqrt[3]{3x-2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

533. 1) $e^x - \sin x$; 2) $\cos x - \ln x$; 3) $\sin x - \sqrt[3]{x}$;
4) $6x^4 - 9e^x$; 5) $\frac{5}{x} + 4e^x$; 6) $\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2}\ln x$.

534. 1) $\sin 5x + \cos(2x-3)$; 2) $e^{2x} - \ln 3x$;
3) $\sin(x-3) - \ln(1-2x)$; 4) $6\sin\frac{2x}{3} - e^{1-3x}$.

535. 1) $x^2\cos x$; 2) $x^3\ln x$; 3) $5xe^x$;
4) $x\sin 2x$; 5) $e^{-x}\sin x$; 6) $e^x\cos x$.

536. 1) $\frac{x^3+1}{x^2+2}$; 2) $\frac{x^2}{x^3+1}$; 3) $\frac{\sin x}{x+1}$; 4) $\frac{\ln x}{1-x}$.

537. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:
1) $f(x)=2x^3-x^2$; 2) $f(x)=-3x^3+2x^2+4$;
3) $f(x)=x^5-5x^3-20x$; 4) $f(x)=(x+3)^3(x-4)^2$;
5) $f(x)=\frac{3x+1}{x-2}$; 6) $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$.

538. Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0, если:
1) $f(x)=\cos x\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$; 2) $f(x)=e^x\ln x$, $x_0=1$;
3) $f(x)=\frac{2\cos x}{\sin x}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; 4) $f(x)=\frac{x}{1+e^x}$, $x_0=0$.

539. Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0:
1) $y=x^2-2x$, $x_0=3$; 2) $y=x^3+3x$, $x_0=3$;
3) $y=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$; 4) $y=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$.

540. Закон движения тела задан формулой $s(t)=0{,}5t^2+3t+2$ (s — в метрах, t — в секундах). Какой путь пройден телом за 4 с? Какова скорость движения в этот момент времени?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найти значение производной функции $f(x)=3x^3+4x-1$ в точке $x=3$.
2. Найти производную функции:

$$\frac{3}{x}+2\sqrt{x}-e^x;\ (3x-5)^4;\ 3\sin 2x\cdot\cos x;\ \frac{x^3}{x^2+5}.$$

3. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y=\cos 3x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{6}$.
4. Найти угол между касательной к графику функции $y=x^4-2x^3+3$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{1}{2}$ и осью Ox.

Найти производную функции (541—542).

541. 1) $y=\cos^2 3x$; 2) $y=\sin^2 \frac{x}{2}$;

3) $y=\sin x\cdot\cos x+x$; 4) $y=(x^3+1)\cos 2x$;

5) $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2}$; 6) $y=\sqrt[3]{x-1}\,(x^4-1)$.

542. 1) $y=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$; 2) $y=\frac{\sqrt{x+4}}{4x}$;

3) $y=\frac{x}{\sqrt{x+2}}$; 4) $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

543. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x)=2^x+2^{-x}$; 2) $f(x)=3^{2x}-2x\ln 3$;

3) $f(x)=x+\ln 2x$; 4) $f(x)=x+\ln(2x+1)$;

5) $f(x)=6x-x\sqrt{x}$; 6) $f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}-3x$.

544. Найти все значения a, при которых $f'(x)\geqslant 0$ для всех действительных значений x, если $f(x)=x^3+3x^2+ax$.

545. Найти все значения a, при которых $f'(x)<0$ для всех действительных значений x, если $f(x)=ax^3-6x^2-x$.

546. Найти все значения a, при которых уравнение $f'(x)=0$ не имеет действительных корней, если:

1) $f(x)=ax^2-\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=ax+\frac{1}{x}$;

3) $f(x)=ax^3+3x^2+6x$; 4) $f(x)=x^3+6x^2+ax$.

547. Найти все значения a, при которых неравенство $f'(x)<0$ не имеет действительных решений, если:

1) $f(x)=ax^7+x^3-1$; 2) $f(x)=x^5+ax^3+3$;

3) $f(x)=(x+a)\sqrt{x}$; 4) $f(x)=x+\frac{a}{x}$.

548. Под каким углом пересекаются графики функций:

1) $y=2\sqrt{x}$ и $y=2\sqrt{6-x}$;

2) $y=\sqrt{2x+1}$ и $y=1$?

549. Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0:

1) $y=2\sin\frac{x}{2}$, $x_0=\frac{3\pi}{2}$; 2) $y=2^{-x}-2^{-2x}$, $x_0=2$;

3) $y=\frac{x+2}{3-x}$, $x_0=2$; 4) $y=x+\ln x$, $x_0=e$.

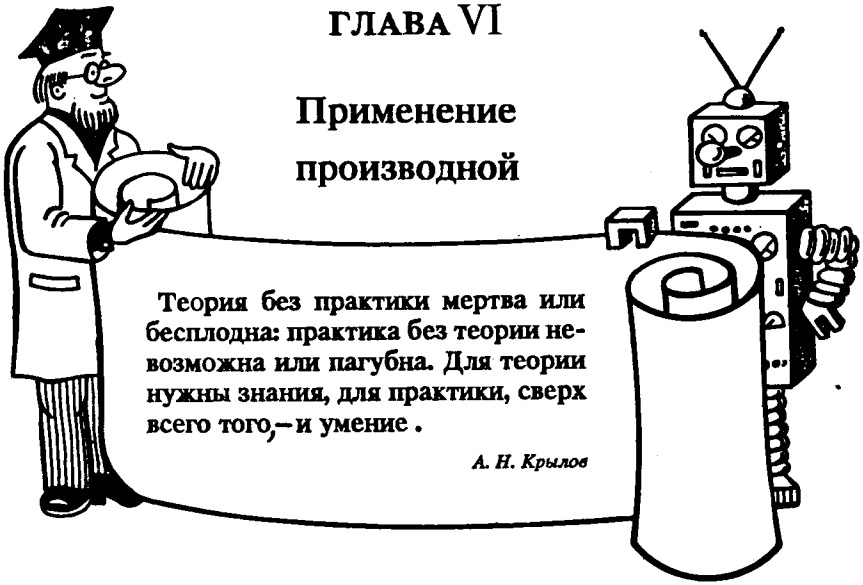
550*. Найти уравнения касательных к графику функции $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2$, параллельных прямой $y=6x$.

551*. Прямая касается гиперболы $y=\frac{4}{x}$ в точке $(1; 4)$. Найти площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат.

552.** Прямая касается гиперболы $y=\frac{k}{x}$, где $k>0$, в точке с абсциссой x_0.

1) Доказать, что площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, не зависит от положения точки касания; найти эту площадь.

2) Доказать, что эта касательная проходит через точки $\left(x_0; \frac{k}{x_0}\right)$ и $(2x_0; 0)$.



ГЛАВА VI

Применение производной

Теория без практики мертва или бесплодна: практика без теории невозможна или пагубна. Для теории нужны знания, для практики, сверх всего того,– и умение.

А. Н. Крылов

§ 27. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Производная широко используется для исследования функций, т. е. для изучения различных свойств функций. Например, с помощью производной можно находить промежутки возрастания и убывания функции, ее наибольшие и наименьшие значения.

Рассмотрим *применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций.*

Пусть значения производной функции $y=f(x)$ положительны на некотором промежутке, т. е. $f'(x)>0$. Тогда угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$ к графику этой функции в каждой точке данного промежутка положителен; это означает, что касательная к графику функции направлена вверх и поэтому график функции на этом промежутке «поднимается», т. е. функция $f(x)$ возрастает (рис. 56).

Если $f'(x)<0$ на некотором промежутке, то угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$ к графику функции $y=f(x)$ отрицателен. Это означает, что касательная к графику функции направлена вниз и поэтому график функции на этом промежутке «опускается», т. е. функция $f(x)$ убывает (рис. 57).

Крылов Алексей Николаевич (1863—1945) — советский математик, механик и кораблестроитель, академик. Основные исследования относятся к теории корабля, строительной механике, теории дифференциальных уравнений и истории науки.

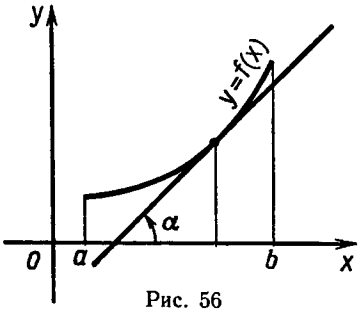


Рис. 56

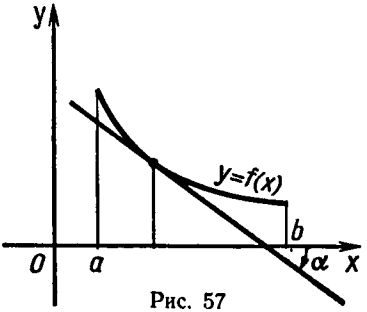


Рис. 57

Итак, если $f'(x)>0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *возрастает* на этом промежутке.

Если $f'(x)<0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *убывает* на этом промежутке.

Строгое доказательство этого утверждения выходит за рамки школьного курса математики.

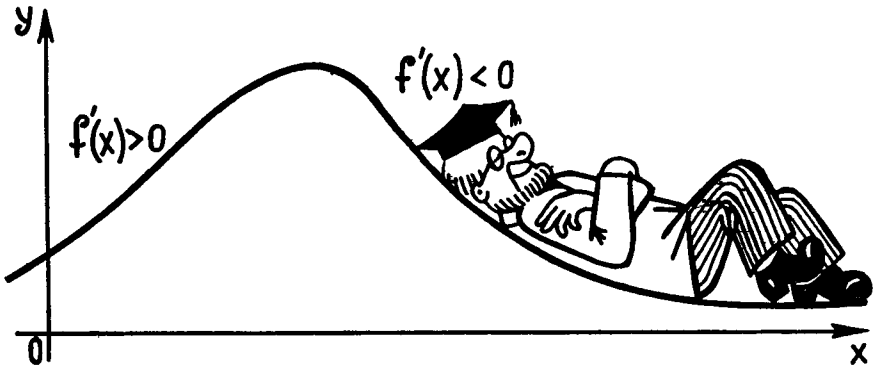
З а д а ч а 1. Доказать, что функция

$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

возрастает на промежутке $x>1$.

△ Найдем производную: $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$. Если $x>1$, то $\frac{x^2-1}{x^2}>0$, т. е. $f'(x)>0$ при $x>1$, и поэтому данная функция возрастает на промежутке $x>1$. ▲

Промежутки возрастания и убывания функции часто называют *промежутками монотонности* этой функции.



Задача 2. Найти интервалы монотонности функции $f(x)=x^3-3x^2$.

△ Найдем производную: $f'(x)=3x^2-6x$. Решая неравенство $f'(x)>0$, т. е. неравенство $3x^2-6x>0$, находим интервалы возрастания: $x<0$, $x>2$. Решая неравенство $f'(x)<0$, т. е. неравенство $3x^2-6x<0$, находим интервал убывания: $0<x<2$. ▲

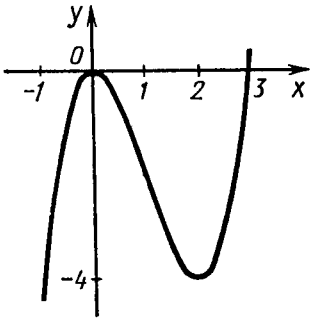


Рис. 58

График функции $y=x^3-3x^2$ изображен на рисунке 58. Из этого рисунка видно, что функция $y=x^3-3x^2$ возрастает не только на интервалах $x<0$ и $x>2$, но и на промежутках $x\leqslant 0$ и $x\geqslant 2$; убывает не только на интервале $0<x<2$, но и на отрезке $0\leqslant x\leqslant 2$.

Упражнения

553. Доказать, что функция $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ возрастает на промежутке $x>1$, убывает на промежутках $x<0$ и $0<x<1$.

Найти интервалы возрастания и убывания функции (**554—558**).

554. 1) $y=x^2-x$; 2) $y=5x^2-3x-1$;
3) $y=x^2+2x$; 4) $y=x^2+12x-100$.

555. 1) $y=x^3-3x$; 2) $y=x^4-2x^2$;
3) $y=2x^3-3x^2-36x+40$;
4) $y=x^3-6x^2+9$.

---

556. 1) $y=\frac{1}{x+2}$; 2) $y=1+\frac{2}{x}$;
3) $y=-\sqrt{x-3}$; 4) $y=1+3\sqrt{x-5}$.

557. 1) $y=\frac{x^3}{x^2+3}$; 2) $y=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$;
3) $y=(x-1)e^{3x}$; 4) $y=x\cdot e^{-3x}$.

558*. 1) $y=x-\sin 2x$; 2) $y=3x+2\cos 3x$.

559.** При каких значениях a функция возрастает на всей числовой прямой:
1) $y=x^3-ax$; 2) $y=ax-\sin x$?

§ 28. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

На рисунке 58 изображен график функции $y=x^3-3x^2$. Рассмотрим *окрестность точки* $x=0$, *т. е. некоторый интервал, содержащий эту точку*. Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки $x=0$, что наибольшее значение функция x^3-3x^2 в этой окрестности принимает в точке $x=0$. Например, на интервале $(-1; 1)$ наибольшее значение, равное 0, функция принимает в точке $x=0$. Точку $x=0$ называют *точкой максимума* этой функции.

Аналогично точку $x=2$ называют *точкой минимума* функции x^3-3x^2, так как значение функции в этой точке не больше ее значения в любой точке некоторой окрестности точки $x=2$, например окрестности (1,5; 2,5).

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x)\leqslant f(x_0).$$

Например, точка $x_0=0$ является точкой максимума функции $f(x)=1-x^2$, так как $f(0)=1$ и при всех значениях x верно неравенство $f(x)\leqslant 1$ (рис. 59).

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x)\geqslant f(x_0).$$

Например, точка $x_0=2$ является точкой минимума функции $f(x)=3+(x-2)^2$, так как $f(2)=3$ и $f(x)\geqslant 3$ при всех x (рис. 60).

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума.*

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в этой точке.

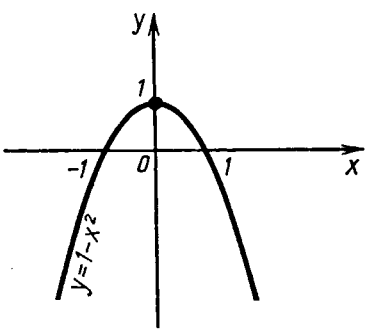


Рис. 59

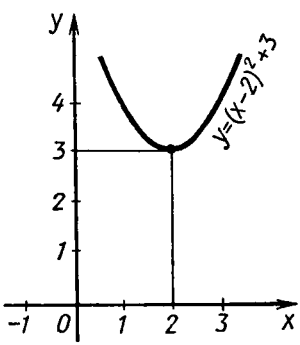


Рис. 60

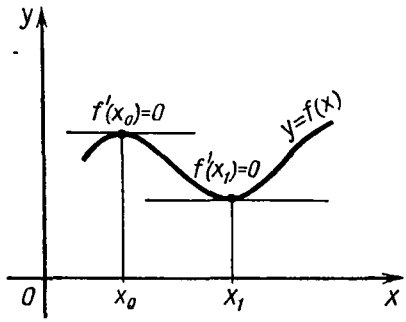


Рис. 61

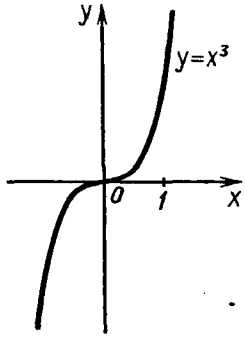


Рис. 62

Если x_0 — точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0)=0$.

Это утверждение называют *теоремой Ферма**.

Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: *в точке экстремума касательная параллельна оси абсцисс* и поэтому ее угловой коэффициент $f'(x_0)$ равен нулю (рис. 61).

Например, функция $f(x)=1-x^2$ (рис. 59) имеет в точке $x_0=0$ максимум, ее производная $f'(x)=-2x$, $f'(0)=0$. Функция $f(x)=(x-2)^2+3$ имеет минимум в точке $x_0=2$ (рис. 60), $f'(x)=2(x-2)$, $f'(2)=0$.

Отметим, что если $f'(x_0)=0$, то этого недостаточно, чтобы утверждать, что x_0 обязательно точка экстремума функции $f(x)$.

Например, если $f(x)=x^3$, то $f'(0)=0$. Однако точка $x=0$ не является точкой экстремума, так как функция x^3 возрастает на всей числовой оси (рис. 62).

Итак, точки экстремума дифференцируемой функции нужно искать только среди корней уравнения $f'(x)=0$, но не всегда корень этого уравнения является точкой экстремума. Точки, в которых производная функции равна нулю, называют *стационарными*.

Таким образом, для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума, *необходимо*, чтобы она была стационарной точкой.

Приведем *достаточные условия* того, что стационарная точка является точкой экстремума, т. е. условия, при выполнении которых стационарная точка есть точка максимума или минимума функции.

Если производная левее стационарной точки положительна, а правее — отрицательна, т. е. при переходе через эту точку производная меняет знак с «+» на «—», то эта стационарная точка является точкой максимума (рис. 63).

* Ферма Пьер (1601—1665) — французский математик, один из основоположников теории чисел и математического анализа.

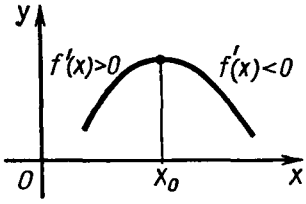


Рис. 63

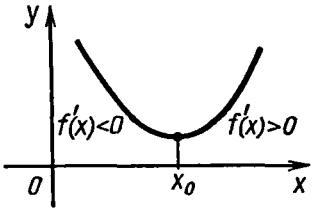


Рис. 64

Действительно, в этом случае левее стационарной точки функция возрастает, а правее убывает, т. е. данная точка есть точка максимума.

Если при переходе через стационарную точку производная меняет знак с «—» на «+», то эта стационарная точка является точкой минимума (рис. 64).

Если при переходе через стационарную точку производная не меняет знак, т. е. слева и справа от стационарной точки производная положительна или отрицательна, то эта точка не является точкой экстремума.

Задача 1. Найти точки экстремума функции $f(x)=x^4-4x^3$.

△ Найдем производную: $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$. Найдем стационарные точки: $4x^2(x-3)=0$, $x_1=0$, $x_2=3$.

Методом интервалов устанавливаем, что производная $f'(x)=4x^2(x-3)$ положительна при $x>3$, отрицательна при $x<0$ и при $0<x<3$.

Так как при переходе через точку $x_1=0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума.

При переходе через точку $x_2=3$ производная меняет знак с «—» на «+». Поэтому $x_2=3$ — точка минимума. ▲

Эскиз графика функции $y=x^4-4x^3$ изображен на рисунке 65.

Задача 2. Найти точки экстремума функции $f(x)=x^3-x$ и значения функции в этих точках.

△ Производная равна $f'(x)=3x^2-1=3\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Приравнивая производную к нулю, находим две стационарные точки: $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$. При переходе через точку $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «+» на «—». Поэтому

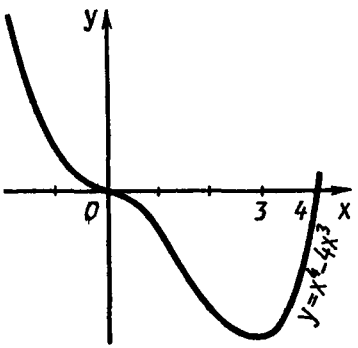


Рис. 65

$x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка максимума. При переходе через точку $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «—» на «+», поэтому $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка минимума.

Значение функции в точке максимума равно $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$, в точке минимума $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$. ▲

Упражнения

560. Найти стационарные точки функции:

1) $y=\frac{x}{2}+\frac{8}{x}$; 2) $y=2x^3-15x^2+36x$;

3) $y=e^{2x}-2e^x$; 4) $y=\sin x-\cos x$.

561. Найти точки экстремума функции:

1) $y=2x^2-20x+1$; 2) $y=3x^2+36x-1$;

3) $y=\frac{x}{5}+\frac{5}{x}$; 4) $y=\frac{4}{x}+\frac{x}{16}$.

562. Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y=x^3-3x^2$; 2) $y=x^4-8x^2+3$;

3) $y=x+\sin x$; 4) $y=2\cos x+x$.

---

563. Найти точки экстремума функции:

1) $y=x+\sqrt{3-x}$; 2) $y=(x-1)^{\frac{6}{7}}$;

3) $y=x-\sin 2x$; 4) $y=\cos 3x-3x$.

564*. Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y=\frac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$; 2) $y=\frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$;

3) $y=(x-1)e^{3x}$; 4) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$.

565.** Исследовать на экстремум функцию $y=(x+1)^n e^{-x}$, $n\in N$ (n — натуральное число).

§ 29. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ПОСТРОЕНИЮ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Если график функции на некотором промежутке представляет собой непрерывную линию, т. е. линию, которую можно провести, не отрывая карандаша от листа бумаги, то эту *функцию называют непрерывной на этом промежутке* (рис. 66). Существуют также функции, которые не являются непрерывными. Например, на рисунке 67 изображен график функции, которая непрерывна на промежутках $[a; c]$ и $(c; b]$, но разрывна в точке $x=c$ и потому не

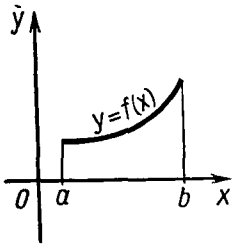


Рис. 66

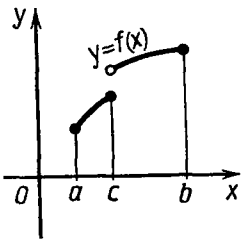


Рис. 67

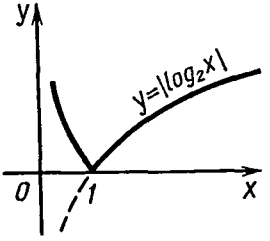


Рис. 68

является непрерывной на всем отрезке $[a; b]$. Все функции, которые изучаются в школьном курсе математики, являются непрерывными на каждом промежутке, на котором они определены.

Отметим, что если функция имеет производную на некотором промежутке, то она непрерывна на этом промежутке.

Обратное утверждение неверно. Функция, непрерывная на промежутке, может не иметь производную в некоторых точках этого промежутка. Например, функция $y=|\log_2 x|$ непрерывна на промежутке $x>0$, но не имеет производной в точке $x=1$, так как в этой точке график функции не имеет касательной (рис. 68).

Перейдем к *построению графиков с помощью производной.*

Задача 1. Построить график функции $f(x)=x^3-2x^2+x$.

△ Эта функция определена при всех $x\in\boldsymbol{R}$. С помощью производной найдем промежутки монотонности этой функции и ее точки экстремума. Производная равна $f'(x)=3x^2-4x+1$. Найдем стационарные точки: $3x^2-4x+1=0$, откуда $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$.

Для определения знака производной разложим квадратный трехчлен $3x^2-4x+1$ на множители: $f'(x)=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)$.

Производная положительна на промежутках $x<\frac{1}{3}$ и $x>1$; следовательно, на этих промежутках функция возрастает.

При $\frac{1}{3}<x<1$ производная отрицательна; следовательно, на этом интервале функция убывает.

Точка $x_1=\frac{1}{3}$ является точкой максимума, так как слева от этой точки функция возрастает, а справа убывает. Значение функции в этой точке равно $f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$.

Точка $x_2=1$ является точкой минимума, так как слева от этой точки функция убывает, а справа возрастает; ее значение в точке минимума равняется $f(1)=0$.

Результаты исследования представим в следующей таблице:

x	$x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

Знак «↗» означает, что функция возрастает, а знак «↘» означает, что функция убывает.

При построении графика обычно находят точки пересечения графика с осями координат. Так как $f(0)=0$, то график проходит через начало координат. Решая уравнение $f(x)=0$, находим точки пересечения графика с осью абсцисс:

$$x^3-2x^2+x=0,\ x(x^2-2x+1)=0,\ x(x-1)^2=0,$$

откуда $x=0$, $x=1$.

Для более точного построения графика найдем значения функции еще в двух точках: $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{8}$, $f(2)=2$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y=x^3-2x^2+x$ (рис. 69). ▲

Для построения графика функции обычно сначала исследуют свойства этой функции с помощью ее производной примерно по такой же схеме, как и при решении задачи 1.

При исследовании свойств функции полезно найти:

1) область ее определения;
2) производную;
3) стационарные точки;
4) промежутки возрастания и убывания;
5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Результаты исследования удобно записать в виде таблицы. Затем, используя таблицу, строят график функции. Для более точного построения графика обычно находят точки его пересечения с осями координат и, быть может, еще несколько точек графика.

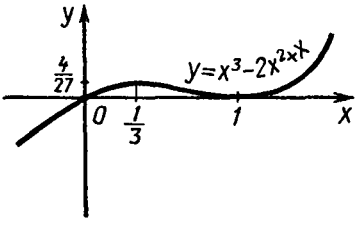


Рис. 69

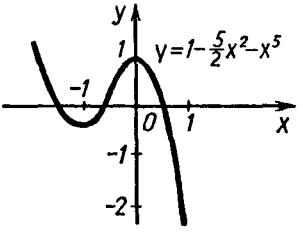


Рис. 70

Задача 2. Построить график функции $f(x)=1-\frac{5}{2}x^2-x^5$.

1) Область определения — множество R всех действительных чисел.

2) $f'(x)=-5x-5x^4=-5x(1+x^3)$.

3) Решая уравнение $-x(1+x^3)=0$, находим стационарные точки $x_1=-1$ и $x_2=0$.

4) Производная положительна на интервале $-1<x<0$, следовательно, на этом интервале функция возрастает. На промежутках $x<-1$ и $x>0$ производная отрицательна, следовательно, на этих промежутках функция убывает.

5) Стационарная точка $x_1=-1$ является точкой минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «—» на «+»; $f(-1)=-0{,}5$. Точка $x_2=0$ — точка максимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «—»; $f(0)=1$.

Составим таблицу:

x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$x>0$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-0{,}5$	↗	1	↘

Используя результаты исследования, строим график функции $y=1-\frac{5}{2}x^2-x^5$ (рис. 70). ▲

График функции $y=1-\frac{5}{2}x^2-x^5$ построен с помощью исследования некоторых свойств этой функции. По графику можно выявить и другие свойства данной функции. Например, из рисунка 70 видно, что уравнение $1-\frac{5}{2}x^2-x^5=0$ имеет три различных действительных корня.

Для построения графика четной (нечетной) функции достаточно исследовать свойства и построить ее график при $x>0$, а затем отразить его симметрично относительно оси ординат (начала координат). Приведем пример.

Задача 3. Построить график функции $f(x)=x+\frac{4}{x}$.

△ 1) Область определения: $x\neq 0$.

2) Данная функция нечетная, так как $f(-x)=-x+\frac{4}{-x}=$ $=-\left(x+\frac{4}{x}\right)=-f(x)$. Поэтому сначала исследуем эту функцию и построим ее график при $x>0$.

3) $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$.

4) На промежутке $x>0$ функция имеет одну стационарную точку $x=2$.

5) Производная положительна на промежутке $x>2$, следовательно, на этом промежутке функция возрастает. На интервале $0<x<2$ производная отрицательна, следовательно, на этом интервале функция убывает.

6) Точка $x=2$ является точкой минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «$-$» на «$+$»; $f(2)=4$.

Составим таблицу:

x	$0<x<2$	2	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	4	↗

Найдем значения функции еще в двух точках: $f(1)=5$, $f(4)=5$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y=x+\frac{4}{x}$ при $x>0$. График этой функции при $x<0$ строим с помощью симметрии относительно начала координат (рис. 71). ▲

Для краткости записи решения задач на построение графиков функции большую часть рассуждений, предшествующих таблице, можно проводить устно.

В некоторых задачах требуется исследовать функцию не на всей области определения, а только на некотором промежутке.

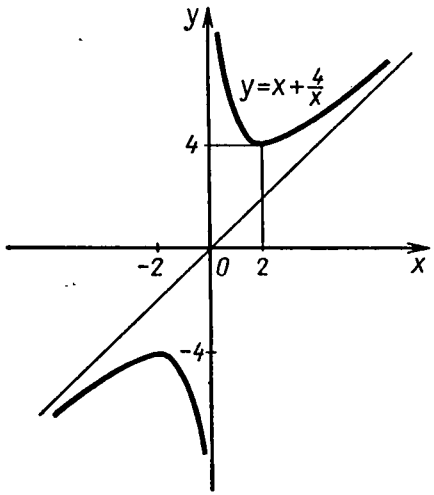


Рис. 71

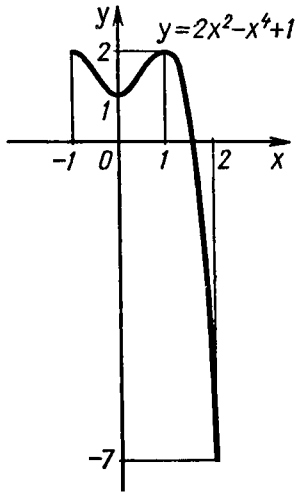


Рис. 72

З а д а ч а 4. Построить график функции $f(x)=1+2x^2-x^4$ на отрезке $[-1; 2]$.

△ Найдем производную $f'(x)=4x-4x^3=4x(1+x)(1-x)$. Составим таблицу:

x	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<2$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	-24
$f(x)$	2	↘	1	↗	2	↘	-7

Используя эту таблицу, строим график функции $y=1+2x^2-x^4$ на отрезке $[-1; 2]$ (рис. 72). ▲

Упражнения

Построить график функции (566—567).

566. 1) $y=x^3-3x^2+4$; 2) $y=2+3x-x^3$;
3) $y=-x^3+4x^2-4x$; 4) $y=x^3+6x^2+9x$.

567. 1) $y=-x^4+8x^2-16$; 2) $y=x^4-2x^2+2$;
3) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6$; 4) $y=6x^4-4x^6$.

568. Построить график функции:
1) $y=x^3-3x^2+2$ на отрезке $[-1; 3]$;
2) $y=x^4-10x^2+9$ на отрезке $[-3; 3]$.

Построить график функции (569—571).

569. 1) $y=2+5x^3-3x^5$; 2) $y=3x^5-5x^3$;
3) $y=4x^5-5x^4$; 4) $y=\frac{1}{10}x^5-\frac{5}{6}x^3+2x$.

570. 1) $y=3x+\frac{1}{3x}$; 2) $y=\frac{4}{x}-x$;
3) $y=x+\frac{2}{\sqrt{x}}$; 4) $y=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

571*. 1) $y=\frac{x^2}{x-2}$; 2) $y=\frac{-x^2+3x-1}{x}$;
3) $y=\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$; 4) $y=\frac{4+x-2x^2}{(x-2)^2}$.

572.** Построить график функции $y=\frac{x^3-4}{(x-1)^3}$. Сколько действительных корней имеет уравнение $\frac{x^3-4}{(x-1)^3}=C$ при различных значениях C?

§ 30. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

1. На практике часто приходится решать задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение из всех тех значений, которые функция принимает *на отрезке*.

Рассмотрим, например, график функции $f(x)=1+2x^2-x^4$ на отрезке $[-1; 2]$. Этот график был построен в предыдущем параграфе (рис. 72).

Из рисунка видно, что наибольшее значение на этом отрезке, равное 2, функция принимает в двух точках: $x=-1$ и $x=1$; наименьшее значение, равное -7, функция принимает при $x=2$.

Точка $x=0$ является точкой минимума функции $f(x)=1+2x^2-x^4$. Это означает, что есть такая окрестность точки $x=0$, например интервал $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, что наименьшее значение в этой окрестности функция принимает при $x=0$. Однако на большем промежутке, например на отрезке $[-1; 2]$, наименьшее значение функция принимает не в точке минимума, а на конце отрезка.

Таким образом, для нахождения наименьшего значения функции на отрезке нужно сравнить ее значения в точках минимума и на концах отрезка.

Вообще пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет производную в каждой внутренней точке этого отрезка.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

1) найти значения функции в концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;

2) найти ее значения в тех стационарных точках, которые принадлежат интервалу $(a; b)$;

3) из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

З а д а ч а 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

△ $f\left(\frac{1}{2}\right)=6\frac{1}{8}$, $f(2)=9\frac{1}{2}$.

2) $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{3x^4-3}{x^2}$, $3x^4-3=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

Интервалу $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ принадлежит одна стационарная точка $x_1=1$, $f(1)=4$.

3) Из чисел $6\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

О т в е т. Наибольшее значение функции равно $9\frac{1}{2}$, наименьшее равно 4. ▲

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x+\frac{1}{x}$ на отрезке $[2; 4]$.

△ $f(2)=2{,}5$, $f(4)=4{,}25$.

2) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $1-\frac{1}{x^2}=0$, $x_1=-1$, $x_2=1$.

На интервале $(2; 4)$ стационарных точек нет.

3) Из чисел 2,5 и 4,25 наибольшее 4,25, наименьшее 2,5.

Ответ. Наибольшее значение функции равно 4,25, наименьшее равно 2,5. ▲

2. При решении многих задач часто приходится находить наибольшее или наименьшее значение функции не на отрезке, а на *интервале*.

В практических задачах обычно функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну стационарную точку: либо точку максимума, либо точку минимума. В этих случаях в точке максимума функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на данном интервале (рис. 73), а в точке минимума — наименьшее значение на данном интервале (рис. 74).

Задача 3. Число 36 записать в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

△ Пусть первый множитель равен x, тогда второй множитель равен $\frac{36}{x}$. Сумма этих чисел равна $x+\frac{36}{x}$. По условию задачи x — положительное число. Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x)=x+\frac{36}{x}$ принимает наименьшее значение на интервале $x>0$.

Найдем производную $f'(x)=1-\frac{36}{x^2}=\frac{(x+6)(x-6)}{x^2}$.

Стационарные точки $x_1=6$ и $x_2=-6$. На интервале $x>0$ есть только одна стационарная точка $x=6$. При переходе через точку $x=6$ производная меняет знак с «—» на «+», и поэтому $x=6$ — точка минимума. Следовательно, наименьшее значение на интерва-

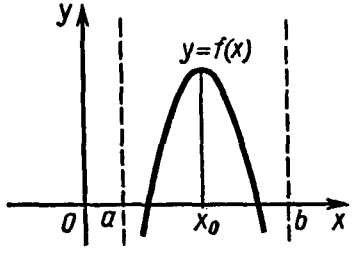


Рис. 73

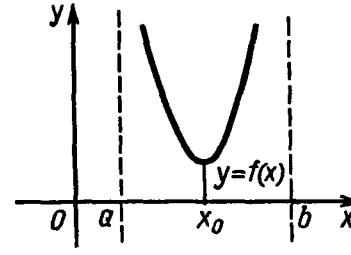


Рис. 74

§ 30. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

1. На практике часто приходится решать задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение из всех тех значений, которые функция принимает *на отрезке.*

Рассмотрим, например, график функции $f(x)=1+2x^2-x^4$ на отрезке $[-1; 2]$. Этот график был построен в предыдущем параграфе (рис. 72).

Из рисунка видно, что наибольшее значение на этом отрезке, равное 2, функция принимает в двух точках: $x=-1$ и $x=1$; наименьшее значение, равное -7, функция принимает при $x=2$.

Точка $x=0$ является точкой минимума функции $f(x)=1+2x^2-x^4$. Это означает, что есть такая окрестность точки $x=0$, например интервал $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, что наименьшее значение в этой окрестности функция принимает при $x=0$. Однако на большем промежутке, например на отрезке $[-1; 2]$, наименьшее значение функция принимает не в точке минимума, а на конце отрезка.

Таким образом, для нахождения наименьшего значения функции на отрезке нужно сравнить ее значения в точках минимума и на концах отрезка.

Вообще пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет производную в каждой внутренней точке этого отрезка.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

1) найти значения функции в концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;

2) найти ее значения в тех стационарных точках, которые принадлежат интервалу $(a; b)$;

3) из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Задача 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

△ $f\left(\frac{1}{2}\right)=6\frac{1}{8}$, $f(2)=9\frac{1}{2}$.

2) $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{3x^4-3}{x^2}$, $3x^4-3=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

Интервалу $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ принадлежит одна стационарная точка $x_1=1$, $f(1)=4$.

3) Из чисел $6\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

Ответ. Наибольшее значение функции равно $9\frac{1}{2}$, наименьшее равно 4. ▲

З а д а ч а 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x+\frac{1}{x}$ на отрезке $[2; 4]$.

△ $f(2)=2{,}5$, $f(4)=4{,}25$.

2) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $1-\frac{1}{x^2}=0$, $x_1=-1$, $x_2=1$.

На интервале $(2; 4)$ стационарных точек нет.

3) Из чисел 2,5 и 4,25 наибольшее 4,25, наименьшее 2,5.

О т в е т. Наибольшее значение функции равно 4,25, наименьшее равно 2,5. ▲

2. При решении многих задач часто приходится находить наибольшее или наименьшее значение функции не на отрезке, а на *интервале*.

В практических задачах обычно функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну стационарную точку: либо точку максимума, либо точку минимума. В этих случаях в точке максимума функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на данном интервале (рис. 73), а в точке минимума — наименьшее значение на данном интервале (рис. 74).

З а д а ч а 3. Число 36 записать в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

△ Пусть первый множитель равен x, тогда второй множитель равен $\frac{36}{x}$. Сумма этих чисел равна $x+\frac{36}{x}$. По условию задачи x — положительное число. Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x)=x+\frac{36}{x}$ принимает наименьшее значение на интервале $x>0$.

Найдем производную $f'(x)=1-\frac{36}{x^2}=\frac{(x+6)(x-6)}{x^2}$.

Стационарные точки $x_1=6$ и $x_2=-6$. На интервале $x>0$ есть только одна стационарная точка $x=6$. При переходе через точку $x=6$ производная меняет знак с «$-$» на «$+$», и поэтому $x=6$ — точка минимума. Следовательно, наименьшее значение на интерва-

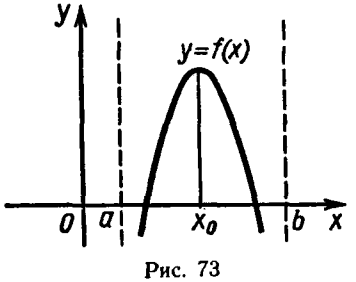


Рис. 73

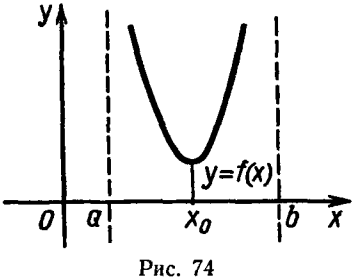


Рис. 74

§ 30. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

1. На практике часто приходится решать задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение из всех тех значений, которые функция принимает *на отрезке*.

Рассмотрим, например, график функции $f(x)=1+2x^2-x^4$ на отрезке $[-1; 2]$. Этот график был построен в предыдущем параграфе (рис. 72).

Из рисунка видно, что наибольшее значение на этом отрезке, равное 2, функция принимает в двух точках: $x=-1$ и $x=1$; наименьшее значение, равное -7, функция принимает при $x=2$.

Точка $x=0$ является точкой минимума функции $f(x)=1+2x^2-x^4$. Это означает, что есть такая окрестность точки $x=0$, например интервал $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, что наименьшее значение в этой окрестности функция принимает при $x=0$. Однако на большем промежутке, например на отрезке $[-1; 2]$, наименьшее значение функция принимает не в точке минимума, а на конце отрезка.

Таким образом, для нахождения наименьшего значения функции на отрезке нужно сравнить ее значения в точках минимума и на концах отрезка.

Вообще пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет производную в каждой внутренней точке этого отрезка.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

1) найти значения функции в концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;

2) найти ее значения в тех стационарных точках, которые принадлежат интервалу $(a; b)$;

3) из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

З а д а ч а 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

△ $f\left(\frac{1}{2}\right)=6\frac{1}{8}$, $f(2)=9\frac{1}{2}$.

2) $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{3x^4-3}{x^2}$, $3x^4-3=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

Интервалу $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ принадлежит одна стационарная точка $x_1=1$, $f(1)=4$.

3) Из чисел $6\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

О т в е т. Наибольшее значение функции равно $9\frac{1}{2}$, наименьшее равно 4. ▲

З а д а ч а 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x+\frac{1}{x}$ на отрезке $[2; 4]$.

△ $f(2)=2{,}5$, $f(4)=4{,}25$.

2) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $1-\frac{1}{x^2}=0$, $x_1=-1$, $x_2=1$.

На интервале $(2; 4)$ стационарных точек нет.

3) Из чисел 2,5 и 4,25 наибольшее 4,25, наименьшее 2,5.

О т в е т. Наибольшее значение функции равно 4,25, наименьшее равно 2,5. ▲

2. При решении многих задач часто приходится находить наибольшее или наименьшее значение функции не на отрезке, а на *интервале.*

В практических задачах обычно функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну стационарную точку: либо точку максимума, либо точку минимума. В этих случаях в точке максимума функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на данном интервале (рис. 73), а в точке минимума — наименьшее значение на данном интервале (рис. 74).

З а д а ч а 3. Число 36 записать в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

△ Пусть первый множитель равен x, тогда второй множитель равен $\frac{36}{x}$. Сумма этих чисел равна $x+\frac{36}{x}$. По условию задачи x — положительное число. Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x)=x+\frac{36}{x}$ принимает наименьшее значение на интервале $x>0$.

Найдем производную $f'(x)=1-\frac{36}{x^2}=\frac{(x+6)(x-6)}{x^2}$.

Стационарные точки $x_1=6$ и $x_2=-6$. На интервале $x>0$ есть только одна стационарная точка $x=6$. При переходе через точку $x=6$ производная меняет знак с «—» на «+», и поэтому $x=6$ — точка минимума. Следовательно, наименьшее значение на интерва-

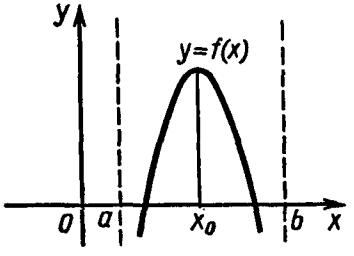


Рис. 73

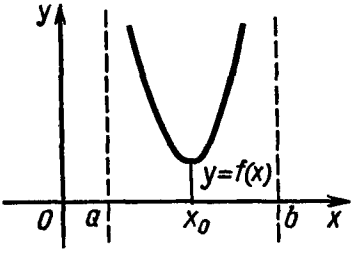


Рис. 74

ле $x>0$ функция $f(x)=x+\frac{36}{x}$ принимает в точке $x=6$ (это значение $f(6)=12$).

Ответ. $36=6\cdot 6$. ▲

3*. При решении некоторых задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции полезно использовать следующее утверждение:

> Если значения функции $f(x)$ неотрицательны на некотором промежутке, то эта функция и функция $(f(x))^n$, где n — натуральное число, принимают наибольшее (наименьшее) значение в одной и той же точке.

Задача 4*. Из всех прямоугольников, вписанных в окружность радиуса R, найти прямоугольник наибольшей площади.

△ Найти прямоугольник — это значит найти его размеры, т. е. длины его сторон. Пусть прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R (рис. 75). Обозначим $AB=x$. Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора находим $BC=\sqrt{4R^2-x^2}$. Площадь прямоугольника равна:

$$S(x)=x\sqrt{4R^2-x^2},\text{ где } 0<x<2R.$$

Задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $S(x)$ принимает наибольшее значение на интервале $0<x<2R$.

Так как $S(x)>0$ на интервале $0<x<2R$, то функции $S(x)$ и $f(x)=(S(x))^2$ принимают наибольшее значение на этом интервале в одной и той же точке.

Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x)=x^2(4R^2-x^2)=4R^2x^2-x^4$ принимает наибольшее значение на интервале $0<x<2R$.

Найдем производную

$$f'(x)=8R^2x-4x^3=4x(R\sqrt{2}+x)(R\sqrt{2}-x).$$

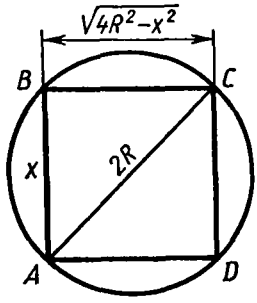


Рис. 75

На интервале $0<x<2R$ есть только одна стационарная точка $x=R\sqrt{2}$ — точка максимума. Следовательно, наибольшее значение функция $f(x)$ (а значит, и функция $S(x)$) принимает при $x=R\sqrt{2}$.

Итак, одна сторона искомого прямоугольника равна $R\sqrt{2}$, другая равна $\sqrt{4R^2-(R\sqrt{2})^2}=R\sqrt{2}$, т. е. искомый прямоугольник — квадрат со стороной $R\sqrt{2}$, его площадь равна $2R^2$. ▲

Упражнения

573. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3+3x^2-36x$:
1) на отрезке $[-4; 3]$; 2) на отрезке $[-2; 1]$.

574. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:
1) $f(x)=x^4-8x^2+5$ на отрезке $[-3; 2]$;
2) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ на отрезке $[-2; -0{,}5]$;
3) $f(x)=x-\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 4]$;
4) $f(x)=\sin x+\cos x$ на отрезке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

575. Найти наибольшее (или наименьшее) значение функции:
1) $f(x)=x^2+\frac{16}{x^2}$ на интервале $x>0$;
2) $f(x)=\frac{2}{x}-x^2$ на интервале $x<0$.

576. Число 50 записать в виде суммы двух чисел, сумма кубов которых наименьшая.

577. Записать число 625 в виде произведения двух положительных чисел так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

578. Из всех прямоугольников с периметром p найти прямоугольник наибольшей площади.

579. Из всех прямоугольников, площадь которых равна 9 см^2, найти прямоугольник с наименьшим периметром.

---

580. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:
1) $f(x)=\ln x-x$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$;
2) $f(x)=x+e^{-x}$ на отрезке $[-1; 2]$;
3) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ на отрезке $[0; 2\pi]$;
4) $f(x)=2\cos x-\cos 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

581. Найти наибольшее значение функции:
1) $3\sqrt{x}-x\sqrt{x}$ на промежутке $x>0$;
2) $3x-2x\sqrt{x}$ на промежутке $x>0$.

582. Найти наименьшее значение функции:
1) $e^{3x}-3x$ на интервале $(-1; 1)$;
2) $\frac{1}{x}+\ln x$ на интервале $(0; 2)$.

583*. Найти наибольшее значение функции:
1) $x\sqrt[4]{5-x}$ на интервале $(0; 5)$;
2) $x\sqrt[3]{4-x}$ на интервале $(0; 4)$.

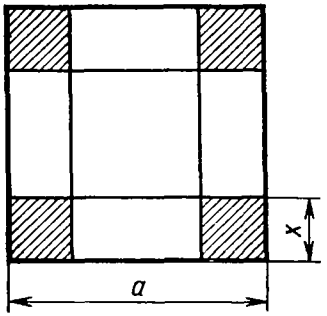


Рис. 76

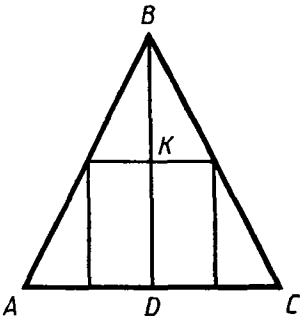


Рис. 77

584*. Из квадратного листа картона со стороной a нужно сделать открытую сверху коробку прямоугольной формы, вырезав по краям квадраты и загнув образовавшиеся края (рис. 76). Какой должна быть высота коробки, чтобы ее объем был наибольшим?

585*. Равнобедренные треугольники описаны около квадрата со стороной a так, что одна сторона квадрата лежит на основании треугольника (рис. 77). Обозначая $BK=x$, найти такое значение x, при котором площадь треугольника наименьшая.

586.** Из всех прямоугольников, у которых две вершины лежат на оси Ox, а две другие — на параболе $y=3-x^2$, выбран прямоугольник с наибольшей площадью. Найти эту площадь.

587.** Найти на параболе $y=x^2$ точку, ближайшую к точке A (2; 0,5).

588.** Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб. При каком угле наклона боковых стенок к основанию площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

589. Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $y=2x^3+3x^2-2$;
2) $y=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+5$;
3) $y=\frac{3}{x}-1$;
4) $y=\frac{2}{x-3}$.

590. Найти стационарные точки функции:

1) $y=x^4-4x^3-8x^2+1$;
2) $y=4x^4-2x^2+3$;
3) $y=\frac{x}{3}+\frac{12}{x}$;
4) $y=\cos 2x+2\cos x$.

591. Найти точки экстремума функции:

1) $y=x^3-4x^2$;
2) $y=3x^4-4x^3$.

592. Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y=x^5-2{,}5x^2+3$;
2) $y=0{,}2x^5-4x^2-3$.

593. Построить график функции:

1) $y=\frac{x^3}{3}+3x^2$; 2) $y=-\frac{x^4}{4}+x^2$.

594. Построить график функции:

1) $y=3x^2-6x+5$ на отрезке $[0; 3]$;

2) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$ на отрезке $[-2; 4]$.

595. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x)=x^3-6x^2+9$ на отрезке $[-2; 2]$;

2) $f(x)=x^3+6x^2+9x$ на отрезке $[-4; 0]$;

3) $f(x)=x^4-2x^2+3$ на отрезке $[-4; 3]$;

4) $f(x)=x^4-8x^2+5$ на отрезке $[-3; 2]$.

596. Доказать, что из всех прямоугольников данного периметра наименьшую диагональ имеет квадрат.

597. Из всех равнобедренных треугольников с периметром p найти треугольник с наибольшей площадью.

598. Из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых в основании лежит квадрат и площадь полной поверхности равна 600 см^2, найти параллелепипед наибольшего объема.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=6x-2x^3$.
2. Найти точки экстремума функции $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$.
3. Построить график функции:
   $y=2x^4-x^2+1$; $y=x^3-3x$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x+\frac{4}{x}$ на отрезке $[1; 5]$.
5. Периметр основания прямоугольного параллелепипеда 8 м, а высота 3 м. Какой длины должны быть стороны основания, чтобы объем параллелепипеда был наибольшим?

---

599. Доказать, что функция $y=1{,}8x^5-2\frac{1}{3}x^3+7x+12{,}5$ возрастает на всей области определения.

600. Доказать, что функция $y=x(1+2\sqrt{x})$ возрастает на всей области определения.

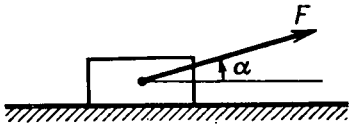


Рис. 78

601. Найти точки экстремума функции:

1) $y=x\ln x$; 2) $y=xe^x$;

3) $y=\frac{4}{x-3}-\frac{16}{x-7}$; 4) $y=\frac{25}{7-x}-\frac{9}{3-x}$.

602. Построить график функции:

1) $y=\frac{2}{x^2-4}$; 2) $y=\frac{2}{x^2+4}$;

3) $y=(x-1)^2(x+2)$; 4) $y=x(x-1)^3$.

603. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ на отрезке $\left[0;\frac{3}{2}\pi\right]$;

2) $f(x)=2\cos x+\sin 2x$ на отрезке $[0;\pi]$.

604. Тело движется по закону $s(t)=6t^2-t^3$. Какова наибольшая скорость тела?

605. Из всех прямоугольных треугольников, у которых сумма одного катета и гипотенузы равна l, найти треугольник с наибольшей площадью.

606*. Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг радиуса R так, что одна сторона прямоугольника лежит на диаметре полукруга, выбран тот, у которого наибольшая площадь. Найти эту площадь.

607*. Открытый кузов грузового автомобиля имеет вид прямоугольного параллелепипеда с площадью поверхности $2S$. Каковы должны быть длина и ширина кузова, чтобы его объем был наибольшим, а отношение длины к ширине равнялось $\frac{5}{2}$?

608.** Найти точки экстремума функции $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$.

609.** Построить график функции:

1) $y=(x^2-1)\cdot\sqrt{x+1}$; 2) $y=|x|\cdot\sqrt[3]{1+3x}$;

3) $y=x^2\cdot e^{-x}$; 4) $y=x^3\cdot e^{-x}$.

610.** Груз, лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть с места силой, приложенной к этому грузу (рис. 78). Определить угол, образуемый этой силой с плоскостью, при котором величина силы будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k.

ГЛАВА VII

Интеграл

Нет ни одной области математики, как бы абстрактна она ни была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям действительного мира.

Н.И. Лобачевский

§ 31. ПЕРВООБРАЗНАЯ

Рассмотрим движение точки вдоль прямой. Пусть за время t от начала движения точка прошла путь $s(t)$. Тогда мгновенная скорость $v(t)$ равна производной функции $s(t)$, т. е. $v(t)=s'(t)$.

В практике встречается обратная задача: по заданной скорости движения точки $v(t)$ найти пройденный ею путь $s(t)$, т. е. найти такую функцию $s(t)$, производная которой равна $v(t)$. Функцию $s(t)$, такую, что $s'(t)=v(t)$, называют *первообразной функции* $v(t)$.

Например, если $v(t)=at$, где a — заданное число, то функция $s(t)=\frac{at^2}{2}$ является первообразной функции $v(t)$, так как $s'(t)=\left(\frac{at^2}{2}\right)'=at=v(t)$.

Функция $F(x)$ называется *первообразной функции* $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x)=f(x).$$

Например, функция $F(x)=\sin x$ является первообразной функции $f(x)=\cos x$, так как $(\sin x)'=\cos x$; функция $F(x)=\frac{x^4}{4}$ является первообразной функции $f(x)=x^3$, так как $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$.

Лобачевский Николай Иванович (1792—1856) — русский математик, создатель неевклидовой геометрии, совершившей переворот в представлении о природе пространства.

Задача 1. Доказать, что функции $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3}+1$, $\frac{x^3}{3}-4$ являются первообразными одной и той же функции $f(x)=x^2$.

△ 1) Обозначим $F_1(x)=\frac{x^3}{3}$, тогда $F_1'(x)=3\cdot\frac{x^2}{3}=x^2=f(x)$.

2) $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+1$, $F_2'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+1\right)'=\left(\frac{x^3}{3}\right)'+(1)'=x^2=f(x)$.

3) $F_3(x)=\frac{x^3}{3}-4$, $F_3'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-4\right)'=x^2=f(x)$. ▲

Вообще любая функция $\frac{x^3}{3}+C$, где C — постоянная, является первообразной функции x^2. Это следует из того, что производная постоянной равна нулю. Этот пример показывает, что для заданной функции ее *первообразная определяется неоднозначно.*

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные одной и той же функции $f(x)$. Тогда $F'(x)=f(x)$ и $F_2'(x)=f(x)$. Производная их разности $g(x)=F_1(x)-F_2(x)$ равна нулю, так как $g'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$.

Если $g'(x)=0$ на некотором промежутке, то касательная к графику функции $y=g(x)$ в каждой точке этого промежутка параллельна оси Ox. Поэтому графиком функции $y=g(x)$ является прямая, параллельная оси Ox, т. е. $g(x)=C$, где C — некоторая постоянная. Из равенств $g(x)=C$, $g(x)=F_1(x)-F_2(x)$ следует, что $F_1(x)=F_2(x)+C$.

Итак, если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то все первообразные функции $f(x)$ записываются в виде $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная.

Рассмотрим графики всех первообразных заданной функции $f(x)$. Если $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, то любая первообразная этой функции получается прибавлением к $F(x)$ некоторой постоянной: $F(x)+C$. Графики функций $y=F(x)+C$ получаются из графика $y=F(x)$ сдвигом вдоль оси Oy (рис. 79). Выбором C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

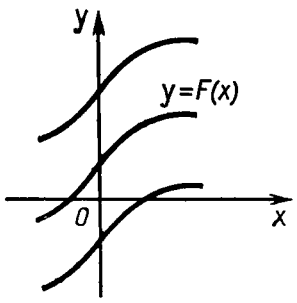


Рис. 79

Задача 2. Для функции $f(x)=x$ найти такую первообразную, график которой проходит через точку (2; 5).

△ Все первообразные функции $f(x)=x$ находятся по формуле $F(x)=\frac{x^2}{2}+C$, так как $F'(x)=x$. Найдем число C, такое, чтобы график функции $y=\frac{x^2}{2}+C$ проходил через точку (2; 5).

Подставляя $x=2$, $y=5$, получаем $5=\frac{2^2}{2}+C$, откуда $C=3$. Следовательно, $F(x)=\frac{x^2}{2}+3$. ▲

Задача 3. Доказать, что для любого действительного $p\neq -1$ функция $F(x)=\frac{x^{p+1}}{p+1}$ является первообразной функции $f(x)=x^p$ на промежутке $x>0$.

△ Так как $(x^{p+1})'=(p+1)\cdot x^p$, то $\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)'=\frac{(x^{p+1})'}{p+1}=x^p$. ▲

Например, первообразная функции $\frac{1}{x^2}$ равна $\frac{x^{-2+1}}{-2+1}=-\frac{1}{x}$; первообразная функции $\sqrt{x}$ равна $\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

Упражнения

611. Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой прямой:

1) $F(x)=\frac{x^6}{6}$, $f(x)=x^5$; 2) $F(x)=\frac{x^5}{5}+1$, $f(x)=x^4$;

3) $F(x)=x^3+2$, $f(x)=3x^2$; 4) $F(x)=\frac{x^4}{2}+3$, $f(x)=2x^3$.

612. Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ при $x>0$:

1) $F(x)=\frac{2}{x}$, $f(x)=-\frac{2}{x^2}$; 2) $F(x)=\frac{1}{x^2}+3$, $f(x)=-\frac{2}{x^3}$;

3) $F(x)=1+\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 4) $F(x)=\sqrt[3]{x}$, $f(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

613. Пользуясь утверждением задачи 3, найти все первообразные функции:

1) x^2; 2) x^3; 3) x^{-3}; 4) $x^{-\frac{1}{2}}$.

---

614. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x)=x^2$, $M(1;2)$; 2) $f(x)=x$, $M(-1;3)$;

3) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $M(1;1)$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$, $M(9;10)$.

615. Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой прямой:

1) $F(x)=3e^{\frac{x}{3}}$, $f(x)=e^{\frac{x}{3}}$; 2) $F(x)=1+\sin 2x$, $f(x)=2\cos 2x$.

§ 32. ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

Напомним, что операцию нахождения производной для заданной функции называют дифференцированием. Обратную операцию нахождения первообразной для данной функции называют *интегрированием* (от лат. untegrare — восстанавливать).

Таблицу первообразных для некоторых функций можно составить, используя таблицу производных. Например, зная, что $(\cos x)' = -\sin x$, получаем $(-\cos x)' = \sin x$, откуда следует, что все первообразные функции $\sin x$ записываются в виде $-\cos x + C$, где C — постоянная.

Приведем *таблицу первообразных.*

Функция	Первообразная
x^p, $p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x}$, $x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx+b)^p$, $p \neq -1$, $k \neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\frac{1}{kx+b}$, $k \neq 0$	$\frac{1}{k}\ln(kx+b) + C$
e^{kx+b}, $k \neq 0$	$\frac{1}{k}e^{kx+b} + C$
$\sin(kx+b)$, $k \neq 0$	$-\frac{1}{k}\cos(kx+b)$
$\cos(kx+b)$, $k \neq 0$	$\frac{1}{k}\sin(kx+b)$

Отметим, что во всех рассмотренных примерах и в дальнейшем функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на таком промежутке, на котором обе функции $F(x)$ и $f(x)$ определены.

Например, первообразной функции $\frac{1}{2x-4}$ является функция $\frac{1}{2}\ln(2x-4)$ на таком промежутке, на котором $2x-4>0$, т. е. на промежутке $x>2$.

Правила интегрирования можно также получить с помощью правил дифференцирования. Приведем следующие правила интегрирования:

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке. Тогда:
1) функция $F(x) \pm G(x)$ является первообразной функции $f(x) \pm g(x)$;
2) функция $aF(x)$ является первообразной функции $af(x)$.

Задача 1. Найти одну из первообразных функции $f(x) = x^2 + 3\cos x$.

△ Используя правила интегрирования и таблицу первообразных для функций x^p при $p=2$ и для $\cos x$, находим одну из первообразных данной функции: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\sin x$. ▲

Задача 2. Найти все первообразные функции

$$e^{1-x} - 4\sin(2x+3).$$

△ По таблице первообразных находим: одной из первообразных функции e^{1-x} является функция $-e^{1-x}$, а одной из первообразных функции $\sin(2x+3)$ является функция $-\frac{1}{2}\cos(2x+3)$. По правилам интегрирования находим одну из первообразных данной функции: $-e^{1-x} + 2\cos(2x+3)$.

Ответ. $-e^{1-x} + 2\cos(2x+3) + C$. ▲

Упражнения

Найти одну из первообразных функции **(616—618)**.

616. 1) $2x^5 - 3x^2$; 2) $5x^4 + 2x^3$; 3) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$;
4) $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$; 5) $\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$; 6) $4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$;
7) $3x^3 + 2x - 1$; 8) $6x^2 - 4x + 3$.

617. 1) $3\cos x - 4\sin x$; 2) $5\sin x + 2\cos x$;
3) $e^x - 2\cos x$; 4) $3e^x - \sin x$;
5) $5 - e^{-x} + 3\cos x$; 6) $1 + 3e^x - 4\cos x$;
7) $6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x$; 8) $\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - 2e^{-x}$.

618. 1) $(x+1)^4$; 2) $(x-2)^3$; 3) $\frac{2}{\sqrt{x-2}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$;
5) $\frac{1}{x-1} + 4\cos(x+2)$; 6) $\frac{3}{x-3} - 2\sin(x-1)$.

619. Найти все первообразные функции:

1) $\sin(2x+3)$; 2) $\cos(3x+4)$;

3) $\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)$; 4) $\sin\left(\frac{x}{4}+5\right)$;

5) $e^{\frac{x+1}{2}}$; 6) e^{3x-5}; 7) $\frac{1}{2x}$; 8) $\frac{1}{3x-1}$.

620. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x)=2x+3$, $M(1;\ 2)$; 2) $f(x)=4x-1$, $M(-1;\ 3)$;

3) $f(x)=\sin 2x$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ 5\right)$; 4) $f(x)=\cos 3x$, $M(0;\ 0)$.

Найти одну из первообразных функции (**621—624**).

621. 1) $e^{2x}-\cos 3x$; 2) $e^{\frac{x}{4}}+\sin 2x$;

3) $2\sin\frac{x}{5}-5e^{2x+\frac{1}{3}}$; 4) $3\cos\frac{x}{7}+2e^{3x-\frac{1}{2}}$;

5) $\sqrt[3]{\frac{x}{4}}-3\cos(6x-1)$; 6) $\sqrt{\frac{x}{5}}+4\sin(4x+2)$;

7) $\frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}}+\frac{2}{1-x}$; 8) $\frac{4}{\sqrt{3x+1}}-\frac{3}{2x-5}$.

622. 1) $\frac{2x^4-4x^3+x}{3}$; 2) $\frac{6x^3-3x+2}{5}$;

3) $(1+2x)(x-3)$; 4) $(2x-3)(2+3x)$.

623. 1) $(2x+1)\sqrt{x}$; 2) $(3x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\frac{x-3}{\sqrt{x}}$.

624. 1) $\sin x\cdot\cos x$;

2) $\sin x\cos 3x-\cos x\sin 3x$.

625*. Найти первообразную функции $y=2\sin 5x+3\cos\frac{x}{2}$, которая при $x=\frac{\pi}{3}$ принимает значение, равное 0.

626.** Найти одну из первообразных функции:

1) $\frac{x}{x-3}$, 2) $\frac{x-1}{x^2+x-2}$; 3) $\cos^2 x$; 4) $\sin 3x\cdot\cos 5x$.

§ 33. ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ И ИНТЕГРАЛ

Рассмотрим фигуру, изображенную на рисунке 80. Эта фигура ограничена снизу отрезком $[a; b]$ оси Ox, сверху графиком непрерывной функции $y=f(x)$, принимающей положительные значения, а с боков отрезками прямых $x=a$ и $x=b$. Такую фигуру называют *криволинейной трапецией.* Отрезок $[a; b]$ называют *основанием* этой *криволинейной трапеции.*

Выясним, как можно вычислить площадь S криволинейной трапеции с помощью первообразной функции $f(x)$.

Обозначим $S(x)$ площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; x]$ (рис. 81), где x — любая точка отрезка $[a; b]$. При $x=a$ отрезок $[a; x]$ вырождается в точку, и поэтому $S(a)=0$; при $x=b$ имеем $S(b)=S$.

Покажем, что $S(x)$ *является первообразной функции* $f(x)$, т. е. $S'(x)=f(x)$.

○ Рассмотрим разность $S(x+h)-S(x)$, где $h>0$ (случай $h<0$ рассматривается аналогично). Эта разность равна площади криволинейной трапеции с основанием $[x; x+h]$ (рис. 82). Если число h мало, то эта площадь приблизительно равна $f(x)\cdot h$, т. е. $S(x+h)-S(x)\approx f(x)\cdot h$.

Следовательно, $\frac{S(x+h)-S(x)}{h}\approx f(x)$. При $h\to 0$ левая часть этого приближенного равенства по определению производной стремится к $S'(x)$, а погрешность приближения при $h\to 0$ становится как угодно малой. Поэтому при $h\to 0$ получается равенство $S'(x)=f(x)$. Это и означает, что $S(x)$ является первообразной функции $f(x)$. ●

Любая другая первообразная $F(x)$ отличается от $S(x)$ на постоянную, т. е.

$$F(x)=S(x)+C. \qquad (1)$$

Из этого равенства при $x=a$ получаем $F(a)=S(a)+C$. Так как $S(a)=0$, то $C=F(a)$ и равенство (1) можно записать так:

$$S(x)=F(x)-F(a).$$

Отсюда при $x=b$ получаем:

$$S(b)=F(b)-F(a).$$

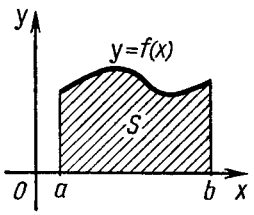


Рис. 80

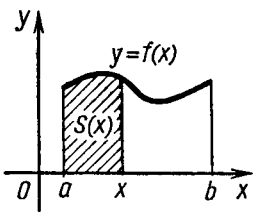


Рис. 81

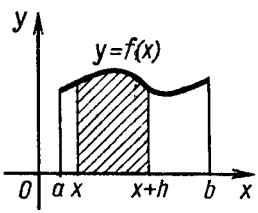


Рис. 82

Итак, *площадь криволинейной трапеции* (рис. 80) можно вычислить по формуле

$$S = F(b) - F(a), \tag{2}$$

где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции сводится к отысканию первообразной $F(x)$ функции $f(x)$, т. е. к интегрированию функции $f(x)$.

Разность $F(b) - F(a)$ называют *интегралом от функции* $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают так: $\int_a^b f(x)\,dx$ (читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»), т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Формулу (3) называют *формулой Ньютона — Лейбница* в честь создателей дифференциального и интегрального исчисления.

Из формул (2) и (3) получаем:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

З а д а ч а 1. Найти площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 83.

△ По формуле (4) находим $S = \int_1^3 x^2 dx$. Вычислим этот интеграл с помощью формулы Ньютона — Лейбница (3). Одной из

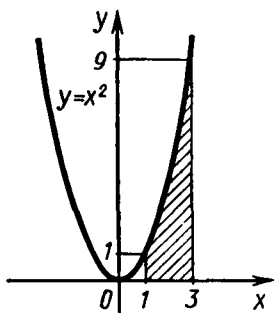


Рис. 83

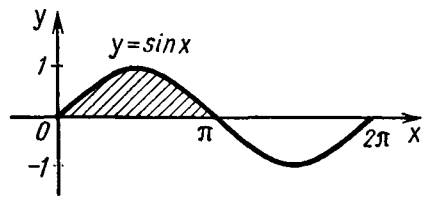


Рис. 84

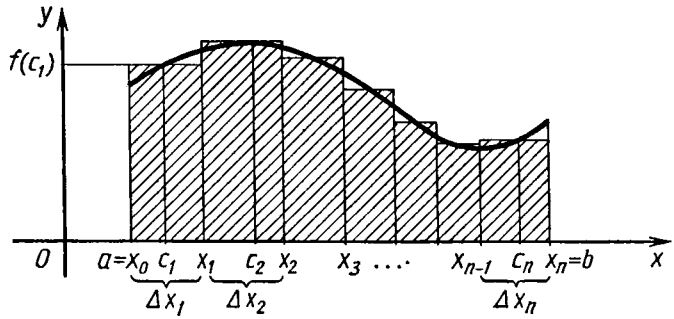


Рис. 85

первообразных функции $f(x)=x^2$ является $F(x)=\frac{x^3}{3}$. Поэтому

$$S=\int_1^3 x^2dx=F(3)-F(1)=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=8\frac{2}{3}\ \text{(кв. ед)}.\ \blacktriangle$$

Формулы (3) и (4) справедливы и для случая, когда функция $f(x)$ положительная внутри отрезка $[a;\ b]$, а на одном из концов отрезка или на обоих концах равна нулю.

З а д а ч а 2. Найти площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 84.

$\triangle$ Функция $F(x)=-\cos x$ является первообразной для функции $f(x)=\sin x$. По формулам (3), (4) получаем:

$$S=\int_0^{\pi}\sin x dx=F(\pi)-F(0)=(-\cos\pi)-(-\cos 0)=$$
$$=1+1=2\ \text{(кв. ед.)}.\ \blacktriangle$$

Исторически *интеграл возник в связи с вычислением площадей фигур,* ограниченных кривыми, в частности площади криволинейной трапеции. Рассмотрим криволинейную трапецию, изображенную на рисунке 85. На этом рисунке основание трапеции — отрезок $[a;\ b]$ — разбито на n отрезков (необязательно равных) точками $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$.

Через эти точки проведены вертикальные прямые. На первом отрезке $[x_0;\ x_1]$ выбрана произвольно точка c_1 и далее на этом отрезке построен прямоугольник высотой $f(c_1)$; на втором отрезке $[x_1;\ x_2]$ выбрана точка c_2 и на этом отрезке построен прямоугольник высотой $f(c_2)$ и т. д. Площадь данной криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей построенных прямоугольников:

$$S_n=f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+\ldots+f(c_n)\Delta x_n,\qquad(5)$$

где Δx_1 — длина первого отрезка, т. е. $\Delta x_1=x_1-x_0$, $\Delta x_2=x_2-x_1$ и т. д. Таким образом, площадь S криволинейной трапеции можно приближенно вычислять по формуле (5), т. е. $S\approx S_n$.

Сумму (5) называют *интегральной суммой функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a; b]$. При этом предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и может принимать любые значения (положительные, отрицательные и равные нулю). Если $n \to \infty$ и длины отрезков разбиения стремятся к нулю, то интегральная сумма S_n стремится к некоторому числу, которое и называют интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$. При этом также справедлива формула Ньютона — Лейбница.

Упражнения

627. Изобразить криволинейную трапецию, ограниченную:
1) графиком функции $y=(x-1)^2$, осью Ox и прямой $x=2$;
2) графиком функции $y=2x-x^2$ и осью Ox;
3) графиком функции $y=\frac{2}{x}$, осью Ox и прямыми $x=1$, $x=4$;
4) графиком функции $y=\sqrt{x}$, осью Ox и прямой $x=4$.

628. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, осью Ox и графиком функции $y=f(x)$:
1) $a=2$, $b=4$, $f(x)=x^3$;
2) $a=3$, $b=4$, $f(x)=x^2$;
3) $a=-2$, $b=1$, $f(x)=x^2+1$;
4) $a=0$, $b=2$, $f(x)=x^3+1$;
5) $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{2\pi}{3}$, $f(x)=\sin x$;
6) $a=-\frac{\pi}{6}$, $b=0$, $f(x)=\cos x$.

629. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и параболой:
1) $y=4-x^2$;
2) $y=1-x^2$;
3) $y=-x^2+3x-2$;
4) $y=-x^2+4x-3$.

---

630. Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, осью Ox и графиком функции $y=f(x)$:
1) $a=1$, $b=8$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$;
2) $a=4$, $b=9$, $f(x)=\sqrt{x}$.

631. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $x=b$, осью Ox и графиком функции $y=f(x)$:
1) $b=2$, $f(x)=5x-x^2$, $2\leqslant x\leqslant 5$;
2) $b=3$, $f(x)=x^2+2x$;
3) $b=1$, $f(x)=e^x-1$;
4) $b=2$, $f(x)=1-\frac{1}{x}$.

§ 34. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Интегралы можно приближенно вычислять с помощью интегральных сумм. Такой способ приближенного вычисления интеграла требует громоздких вычислений. Им пользуются в тех случаях, когда не удается найти первообразную функции $f(x)$ и для вычислений обычно используют ЭВМ, составляя специальные программы. Если же первообразная функции известна, то интеграл можно вычислить точно, используя формулу Ньютона — Лейбница.

Приведем примеры вычисления интегралов по формуле Ньютона — Лейбница с помощью таблицы первообразных и правил интегрирования.

Задача 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 (x-1)\,dx$.

△ Одной из первообразных функции $x-1$ является функция $\frac{x^2}{2}-x$. Поэтому $\int\limits_0^1 (x-1)\,dx=\left(\frac{1^2}{2}-1\right)-\left(\frac{0^2}{2}-0\right)=\frac{1}{2}-1=$

$=-\frac{1}{2}$. ▲

При вычислении интегралов удобно ввести следующее обозначение:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Тогда формулу Ньютона — Лейбница можно записать в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b.$$

Задача 2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-a}^{a} \sin x dx$.

$$\triangle\ \int\limits_{-a}^{a} \sin x dx=(-\cos x)\Big|_{-a}^{a}=(-\cos a)-(-\cos(-a))=$$
$$=-\cos a+\cos(-a)=0,$$

так как $\cos(-a)=\cos a$. ▲

Задача 3. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx$.

$$\triangle\ \int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx=\int\limits_{-1}^{3}(2x+3)^{-\frac{1}{2}}\,dx=(2x+3)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{3}=(2\cdot 3+3)^{\frac{1}{2}}-$$

$-(2\cdot(-1)+3)^{\frac{1}{2}}=3-1=2$. ▲

Задача 4. Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) dx$.

$$\triangle \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) dx=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{2}\left(\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$

$$\left.-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}. \blacktriangle$$

Задача 5*. Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$.

$$\triangle \int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx=\int\limits_0^3 (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx=$$

$$=\int\limits_0^3 \left((x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}\right) dx=\left(\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^3=$$

$$=\left(\frac{2}{5}\cdot 32-\frac{2}{3}\cdot 8\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)=7\frac{11}{15}. \blacktriangle$$

Упражнения

Вычислить интеграл **(632—639)**.

632. 1) $\int\limits_0^1 x\,dx$; 2) $\int\limits_0^3 x^2\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^2 3x^2\,dx$; 4) $\int\limits_{-2}^3 2x\,dx$;

5) $\int\limits_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx$; 6) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$; 7) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx$; 8) $\int\limits_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

633. 1) $\int\limits_1^e \frac{1}{x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\ln 2} e^x\,dx$; 3) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \cos x\,dx$;

4) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi} \sin x\,dx$; 5) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx$; 6) $\int\limits_{-3\pi}^{0} \cos 3x\,dx$.

634. 1) $\int\limits_{-3}^2 (2x-3)\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{-1} (5-4x)\,dx$;

3) $\int\limits_{-1}^2 (1-3x^2)\,dx$; 4) $\int\limits_{-1}^1 (x^2+1)\,dx$;

5) $\int\limits_{-2}^{-1} (6x^2+2x-10)\,dx$; 6) $\int\limits_0^2 (3x^2-4x+5)\,dx$.

635. 1. $\int_0^4 (x-3\sqrt{x})\,dx$; 2) $\int_1^9 \left(2x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int_0^2 e^{3x}dx$; 4) $\int_1^3 2e^{2x}dx$.

---

636. 1) $\int_{-2}^{1} x(x+3)(2x-1)\,dx$; 2) $\int_{-1}^{0} (x+1)(x^2-2)\,dx$;

3) $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$; 4) $\int_{-2}^{-1} \frac{4}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)dx$.

637. 1) $\int_1^2 \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; 2) $\int_1^3 \frac{3x-1}{\sqrt{x}}\,dx$;

3) $\int_0^5 \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\,dx$; 4) $\int_2^7 \frac{4}{\sqrt{x+2}}\,dx$.

638. 1) $\int_1^2 \frac{3}{2x-1}\,dx$; 2) $\int_0^1 \frac{4}{3x+2}\,dx$;

3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

639.** 1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx$; 4) $\int_0^{\pi} (\sin^4 x+\cos^4 x)\,dx$;

5) $\int_0^3 x^2\sqrt{x+1}\,dx$; 6) $\int_3^4 \frac{x^2-4x+5}{x-2}\,dx$.

640.** Найти все числа $b>1$, для которых выполняется равенство $\int_1^b (b-4x)\,dx \geqslant 6-5b$.

§ 35. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ

Задача 1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=-1$, $x=2$ и параболой $y=9-x^2$.

△ Построим график функции $y=9-x^2$ и изобразим данную трапецию (рис. 86).

Искомая площадь S равна интегралу $S=\int\limits_{-1}^{2}(9-x^2)\,dx$.

По формуле Ньютона — Лейбница находим:

$$S=\int\limits_{-1}^{2}(9-x^2)\,dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(9\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(9\,(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=24.\ \blacktriangle$$

Задача 2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$, $y=2x-x^2$ и осью Ox.

△ Построим графики функций $y=x^2$, $y=2x-x^2$ и найдем абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2=2x-x^2$. Корни этого уравнения $x_1=0$, $x_2=1$. Данная фигура изображена на рисунке 87. Из рисунка видно, что эта фигура состоит из двух криволинейных трапеций.

Следовательно, искомая площадь равна сумме площадей этих трапеций:

$$S=\int\limits_{0}^{1}x^2dx+\int\limits_{1}^{2}(2x-x^2)\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}+\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1}^{2}=1.\ \blacktriangle$$

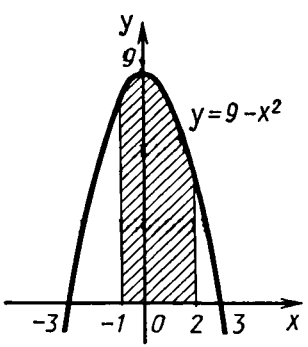


Рис. 86

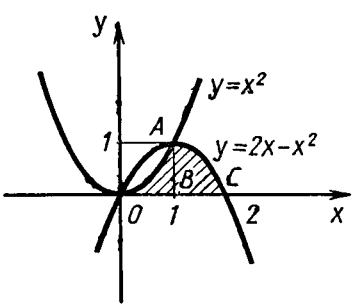


Рис. 87

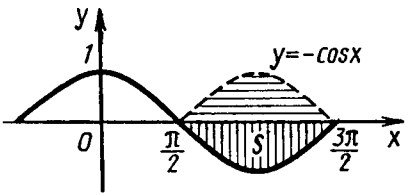


Рис. 88

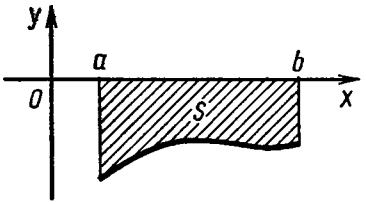


Рис. 89

Задача 3. Найти площадь S фигуры, ограниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y=\cos x$ на этом отрезке.

△ Заметим, что площадь данной фигуры равна площади фигуры, симметричной данной относительно оси Ox (рис. 88), т. е. площади фигуры, ограниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y=-\cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. На этом отрезке $-\cos x \geqslant 0$, и поэтому

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos x)\,dx=(-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\left(-\sin\frac{3\pi}{2}\right)-\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right)=2. \blacktriangle$$

Вообще если $f(x)\leqslant 0$ на отрезке $[a; b]$ (рис. 89), то площадь S криволинейной трапеции равна $S=\int_a^b(-f(x))\,dx$.

Задача 4. Найти площадь S фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+1$ и прямой $y=x+3$.

△ Построим графики функций $y=x^2+1$ и $y=x+3$. Найдем абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2+1=x+3$. Это уравнение имеет корни $x_1=-1$, $x_2=2$. Фигура, ограниченная графиками данных функций, изображена на рисунке 90. Из этого рисунка видно, что искомую площадь можно найти как разность площадей S_1 и S_2 двух трапеций, опирающихся на отрезок

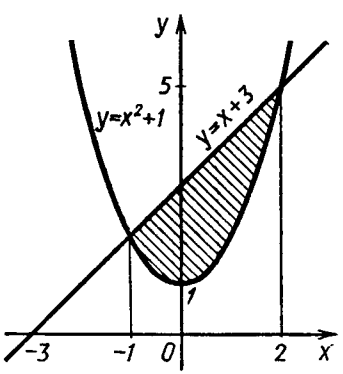


Рис. 90

$[-1; 2]$, первая из которых ограничена сверху отрезком прямой $y=x+3$, а вторая — дугой параболы $y=x^2+1$. Так как

$$S_1=\int_{-1}^{2}(x+3)\,dx,\ S_2=\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx,$$

то $$S=S_1-S_2=\int_{-1}^{2}(x+3)\,dx-\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx.$$

Используя свойство первообразных, можно записать S в виде одного интеграла:

$$S=\int_{-1}^{2}((x+3)-(x^2+1))\,dx=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=4{,}5.\ \blacktriangle$$

Вообще площадь фигуры, изображенной на рисунке 91, равна

$$S=\int_{a}^{b}(f_2(x)-f_1(x))\,dx. \qquad (1)$$

Эта формула справедлива для любых непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (принимающих значения любых знаков), удовлетворяющих условию

$$f_2(x)\geqslant f_1(x).$$

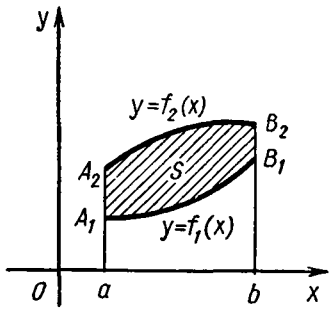


Рис. 91

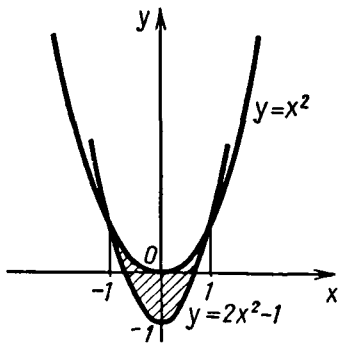


Рис. 92

Задача 5. Найти площадь S фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y=2x^2-1$.

Построим данную фигуру (рис. 92) и найдем абсциссы точек пересечения парабол из уравнения $x^2=2x^2-1$.

Это уравнение имеет корни $x_{1,2}=\pm 1$. Воспользуемся формулой (1). Здесь $f_1(x)=2x^2-1$, $f_2(x)=x^2$.

$$S=\int_{-1}^{1}(x^2-(2x^2-1))\,dx=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}. \blacktriangle$$

Упражнения

641. На рисунке 93 изображены криволинейные трапеции. Найдите площадь каждой из них.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями **(642—651)**.

642. 1) Параболой $y=(x+1)^2$, прямой $y=1-x$ и осью Ox;
2) параболой $y=4-x^2$, прямой $y=x+2$ и осью Ox;
3) параболой $y=4x-x^2$, прямой $y=4-x$ и осью Ox;
4) параболой $y=3x^2$, прямой $y=1{,}5x+4{,}5$ и осью Ox.

643. 1) Графиками функций $y=\sqrt{x}$, $y=(x-2)^2$ и осью Ox;
2) графиками функций $y=x^3$, $y=2x-x^2$ и осью Ox.

644. 1) Параболой $y=x^2+3x$ и осью Ox;
2) параболой $y=x^2-4x+3$ и осью Ox.

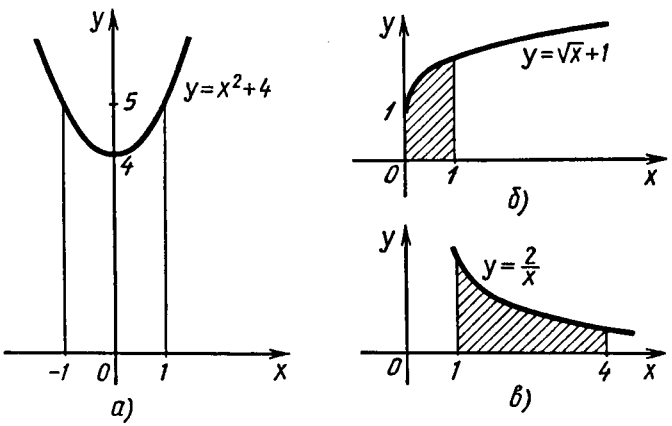


Рис. 93

645. 1) Параболой $y=x^2+1$ и прямой $y=3-x$;
2) параболой $y=(x+2)^2$ и прямой $y=x+2$;
3) графиком функции $y=\sqrt{x}$ и параболой $y=x^2$;
4) графиком функции $y=\sqrt{x}$ и прямой $y=x$.

---

646. 1) Параболами $y=6x^2$, $y=(x-3)(x-4)$ и осью Ox;
2) параболами $y=4-x^2$, $y=(x-2)^2$ и осью Ox.

647. 1) Графиком функции $y=\sin x$, отрезком $[0;\ \pi]$ оси Ox и прямой, проходящей через точки $(0;\ 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$;

2) графиками функций $y=\sin x$, $y=\cos x$ и отрезком $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ оси Ox.

648. 1) Параболой $y=6x-x^2$ и прямой $y=x+4$;
2) параболой $y=4-x^2$ и прямой $y=x+2$.

649. 1) Параболой $y=2-x^2$ и прямой $y=-x$;
2) прямой $y=1$, осью Oy и графиком функции $y=\sin x$ при $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

650*. 1) Параболой $y=-x^2+4x-3$ и прямой, проходящей через точки $(1;\ 0)$ и $(0;\ -3)$;
2) параболой $y=-x^2$ и прямой $y=-2$;
3) параболами $y=1-x^2$ и $y=x^2-1$;
4) графиком функции $y=x^3$ и прямыми $y=1$ и $x=-2$.

651.** 1) Параболой $y=x^2+10$ и касательными к этой параболе, проведенными из точки $(0;\ 1)$;

2) гиперболой $y=\frac{1}{x}$, прямой $x=1$ и касательной к кривой $y=\frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x=2$.

652.** Фигура ограничена линиями $y=x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=1$. Найти точку $(x_0;\ y_0)$ графика функции $y=x^2+1$, через которую надо провести касательную к этому графику так, чтобы она отсекала от фигуры трапецию наибольшей площади.

§ 36. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Простейшие дифференциальные уравнения

До сих пор рассматривались уравнения, в которых неизвестными являлись числа. В математике и ее приложениях приходится рассматривать уравнения, в которых неизвестными являются функции. Так, задача о нахождении пути $s(t)$ по заданной скорости $v(t)$ сводится к решению уравнения $s'(t)=v(t)$, где $v(t)$ — заданная функция, а $s(t)$ — искомая функция.

Например, если $v(t)=3-4t$, то для нахождения $s(t)$ нужно решить уравнение $s'(t)=3-4t$.

Это уравнение содержит производную неизвестной функции. Такие уравнения называют *дифференциальными уравнениями.*

З а д а ч а 1. Решить дифференциальное уравнение $y'=x+1$.

△ Требуется найти функцию $y(x)$, производная которой равна $x+1$, т. е. найти первообразную функции $x+1$. По правилам нахождения первообразных получаем:

$$y=\frac{x^2}{2}+x+C,$$

где C — произвольная постоянная. ▲

Решение дифференциального уравнения определяется неоднозначно, с точностью до постоянной. Обычно к дифференциальному уравнению добавляется условие, из которого эта постоянная определяется.

З а д а ч а 2. Найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y'=\cos x$, удовлетворяющее условию $y(0)=2$.

△ Все решения этого уравнения записываются формулой $y(x)=\sin x+C$. Из условия $y(0)=2$ находим $\sin 0+C=2$, откуда $C=2$.

О т в е т. $y=2+\sin x$.▲

Решение многих физических, биологических, технических и других практических задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y'=ky, \tag{1}$$

где k — заданное число. Решениями этого уравнения являются функции

$$y=C\cdot e^{kx}, \tag{2}$$

где C — постоянная, определяемая условиями конкретной задачи.

Например, скорость $m'(t)$ размножения бактерий связана с массой $m(t)$ бактерий в момент времени t уравнением

$$m'(t)=km(t),$$

где k — положительное число, зависящее от вида бактерий и внешних условий. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t)=Ce^{kt}.$$

Постоянную C можно найти, например, из условия, что в момент $t=0$ масса бактерий m_0 известна. Тогда $m(0)=m_0=Ce^{k\cdot 0}=C$, и поэтому

$$m(t)=m_0e^{kt}.$$

Другим примером применения уравнения (1) является задача о радиоактивном распаде вещества. Если $m'(t)$ — скорость радиоактивного распада в момент времени t, то

$$m'(t)=-km(t),$$

где k — постоянная, зависящая от радиоактивности вещества. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t)=Ce^{-kt}.$$

Если в момент времени t масса равна m_0, то $C=m_0$ и поэтому

$$m(t)=m_0e^{-kt}. \tag{3}$$

Заметим, что на практике скорость распада радиоактивного вещества характеризуется периодом полураспада, т. е. промежутком времени, в течение которого распадается половина исходного вещества.

Пусть T — период полураспада, тогда из равенства (3) при $t=T$ получаем $\frac{m_0}{2}=m_0e^{-kT}$, откуда $k=\frac{\ln 2}{T}$.

Поэтому формула (3) запишется так:

$$m(t)=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

2. Гармонические колебания

В практике часто встречаются процессы, которые периодически повторяются, например колебательные движения маятника, струны, пружины и т. д.; процессы, связанные с переменным электрическим током, магнитным полем и т. д. Решение многих таких задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y''=-\omega^2y, \tag{4}$$

где ω — заданное положительное число, $y=y(x)$, $y''=(y'(x))'$. Функцию $(y'(x))'$ называют *второй производной функции* $y(x)$ и обозначают $y''(x)$ или коротко y''. Решениями уравнения (4) являются функции

$$y(x)=C_1 \sin(\omega x+C_2), \tag{5}$$

где C_1, C_2 — постоянные, определяемые условиями конкретной задачи. Уравнение (4) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний,* а равенство (5) называют *уравнением гармонических колебаний.*

Например, если $y(t)$ — отклонение точки свободно колеблющейся струны от положения равновесия в момент времени t, то

$$y(t)=A \sin(\omega t+\varphi),$$

где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза.

График гармонического колебания является синусоидой.

3. Примеры применения первообразной и интеграла

З а д а ч а 3. Цилиндрический бак, высота которого равна 5 м, а радиус основания равен 0,8 м, заполнен водой (рис. 94). За какое время вытечет вода из бака через круглое отверстие в дне бака, если радиус отверстия равен 0,1 м?

△ Обозначим высоту бака H, радиус его основания R, радиус отверстия r (длины измеряем в метрах, время — в секундах).

Скорость вытекания жидкости v зависит от высоты столба жидкости x и вычисляется по формуле Бернулли

$$v=\sigma\sqrt{2gx}, \tag{6}$$

где $g=9{,}8$, σ — коэффициент, зависящий от свойства жидкости; для воды $\sigma=0{,}6$. Поэтому по мере убывания воды в баке скорость вытекания уменьшается (а не постоянна).

Пусть $t(x)$ — время, за которое вытекает вода из бака высотой x с тем же радиусом основания R и с тем же отверстием радиуса r (рис. 94). Найдем приближенно разностное отношение $\frac{t(x+h)-t(x)}{h}$, считая, что за время $t_1=t(x+h)-t(x)$ скорость вытекания воды постоянна и выражается формулой (6).

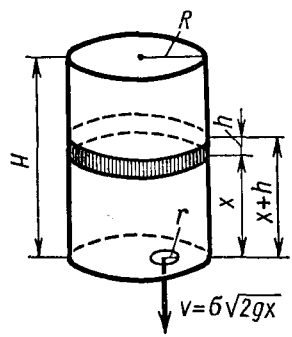


Рис. 94

За время t_1 объем воды, вытекшей из бака, равен объему цилиндра высотой h с радиусом основания R (рис. 94), т. е. равен $\pi R^2 h$. С другой стороны, этот объем равен объему цилиндра, основанием кото-

рого служит отверстие в дне бака, а высота равна произведению скорости вытекания v на время t_1, т. е. объем равен $\pi r^2 v t_1$. Таким образом, $\pi R^2 h = \pi r^2 v t_1$. Отсюда, учитывая формулу (6) и обозначение $t_1 = t(x+h) - t(x)$, получаем:

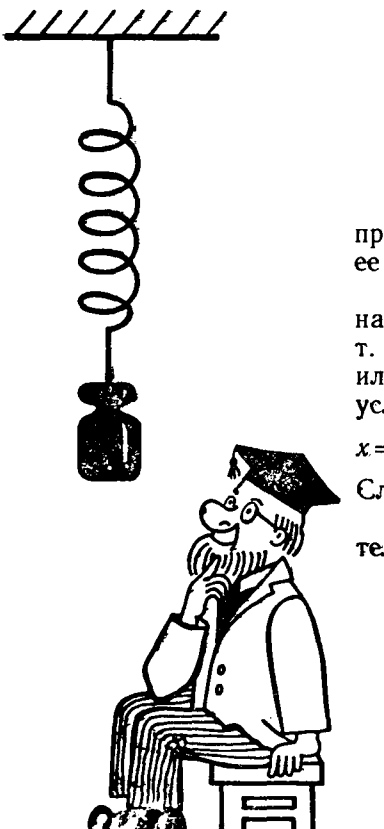
$$\frac{t(x+h)-t(x)}{h} \approx \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

причем погрешность приближения стремится к нулю при $h \to 0$. Следовательно, при $h \to 0$ получается равенство

$$t'(x) = \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ откуда } t(x) = \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{x} + C.$$

Если $x=0$ (в баке нет воды), то $t(0)=0$, поэтому $C=0$. При $x=H$ находим искомое время:

$$t(H) = \frac{R^2\sqrt{2H}}{r^2\sigma\sqrt{g}}.$$



Используя данные задачи, вычисляем:

$$t(5) = \frac{(0{,}8)^2 \cdot \sqrt{10}}{(0{,}1)^2 \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{9{,}8}} \approx 108.$$

Ответ. 108 с. ▲

Задача 4. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для ее сжатия на 0,01 м требуется сила 10 Н.

△ По закону Гука сила F пропорциональна растяжению или сжатию пружины, т. е. $F = kx$, где x — величина растяжения или сжатия (в м), k — постоянная. Из условия задачи находим k. Так как при $x = 0{,}01$ м сила $F = 10$ Н, то $k = \frac{F}{x} = 1000$. Следовательно, $F(x) = kx = 1000x$.

Работа силы $F(x)$ при перемещении тела из точки a в точку b равна

$$A = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Используя данные задачи, получаем:

$$A = \int_0^{0{,}08} 1000x\,dx = 1000\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}08} =$$

$$= 3{,}2 \text{ (Дж)}. \blacktriangle$$

Упражнения

653. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)$ (м/с). Вычислить путь, пройденный телом за промежуток времени от $t=t_1$ до $t=t_2$:

1) $v(t)=3t^2+1$, $t_1=0$, $t_2=4$;
2) $v(t)=2t^2+t$, $t_1=1$, $t_2=3$.

654. Скорость прямолинейно движущегося тела равна $v(t)=4t-t^2$. Вычислить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

655. Решить дифференциальное уравнение:

1) $y'=3-4x$;
2) $y'=6x^2-8x+1$;
3) $y'=3e^{2x}$;
4) $y'=4\cos 2x$;
5) $y'=3\sin x$;
6) $y'=\cos x-\sin x$.

656. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному условию:

1) $y'=\sin x$, $y(0)=0$;
2) $y'=2\cos x$, $y(\pi)=1$;
3) $y'=3x^2+4x-1$, $y(1)=-2$;
4) $y'=2+2x-3x^2$, $y(-1)=2$;
5) $y'=e^x$, $y(1)=1$;
6) $y'=e^{-x}$, $y(0)=2$.

657. Показать, что функция $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$ при любых значениях C_1 и C_2 является решением дифференциального уравнения $y''+\omega^2 y=0$.

658. Масса радия, равная 1 г, через 10 лет уменьшилась до 0,999 г. Через сколько лет масса радия уменьшится до 0,5 г?

659. Вычислить работу, которую нужно затратить на сжатие пружины на 3 см, если сила в 2 Н сжимает эту пружину на 1 см.

660. Вычислить работу, которую нужно затратить при растяжении пружины на 8 см, если сила в 3Н растягивает пружину на 1 см.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

661. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x)=\cos x$, $M(0;\ -2)$;
2) $f(x)=\sin x$, $M(-\pi;\ 0)$;
3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $M(4;\ 5)$;
4) $f(x)=e^x$, $M(0;\ 2)$;
5) $f(x)=3x^2+1$, $M(1;\ -2)$;
6) $f(x)=2-2x$, $M(2;\ 3)$.

662. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{-1}^{2} 2dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{2} (3-x)\,dx$; 3) $\int\limits_{1}^{3} (x^2-2x)\,dx$;

4) $\int\limits_{-1}^{1} (2x-3x^2)\,dx$; 5) $\int\limits_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$; 6) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3}$;

7) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; 8) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

663. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$;

2) $y=\cos x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$, $y=0$;

3) $y=x^2$, $y=2-x$;

4) $y=2x^2$, $y=0{,}5x+1{,}5$;

5) $y=\sqrt[3]{x}$, $x=-8$, $x=-1$, $y=0$;

6) $y=\frac{1}{x^3}$, $x=-3$, $x=-1$, $y=0$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Показать, что функция $F(x)=e^{2x}+x^3-\cos x$ является первообразной для функции $f(x)=2e^{2x}+3x^2+\sin x$ на всей числовой прямой.
2. Для функции $f(x)=3x^2+2x-3$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(1;-2)$.
3. Вычислить:

$$\int\limits_{1}^{2} 3x^3\,dx;\ \int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{x^2};\ \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx;\ \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной: а) параболой $y=x^2+x-6$ и осью Ox; б) графиками функций $y=x^2+1$ и $y=10$.

Вычислить интеграл **(664—665)**.

664. 1) $\int_0^1 (5x^4-8x^3)\,dx$;

2) $\int_{-1}^1 (6x^3-5x)\,dx$;

3) $\int_1^4 \sqrt{x}\left(3-\frac{7}{x}\right)dx$;

4) $\int_1^8 4\sqrt[3]{x}\left(1-\frac{4}{x}\right)dx$;

5) $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$;

6) $\int_2^6 \sqrt{2x-3}\,dx$.

665. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$;

2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$;

3) $\int_1^3 3\sin(3x-6)\,dx$;

4) $\int_0^3 8\cos(4x-12)\,dx$.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями **(666—667)**.

666. 1) $y=\frac{1}{x}$, $y=4x$, $x=1$, $y=0$;

2) $y=\frac{1}{x^2}$, $y=x$, $x=2$, $y=0$;

3) $y=x^2+1$, $y=x+1$;

4) $y=x^2+2$, $y=2x+2$.

667. 1) $y=x^2-6x+9$, $y=x^2+4x+4$, $y=0$;

2) $y=x^2+1$, $y=3-x^2$;

3) $y=x^2$, $y=2\sqrt{2x}$;

4) $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{4-3x}$, $y=0$.

668*. Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней, проходящей через точку пересечения параболы с осью Oy, и прямой $x=1$;

2) гиперболой $y=\frac{4}{x}$, касательной к ней, проходящей через точку с абсциссой $x=2$, и прямыми $y=0$, $x=6$.

669.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=x^3-3x^2-9x+1$, $x=0$, $y=6$, $x<0$;

2) $y=x^4-2x^2+5$, $y=1$, $x=0$, $x=1$.

670.** При каком значении k площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+px$, где p — заданное число, и прямой $y=kx+1$, наименьшая?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА XI КЛАССА

671. Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+x,\ x_0=\frac{1}{3}$;

2) $f(x)=\frac{x^4}{4}+0{,}5x^2-1,\ x_0=\frac{1}{2}$;

3) $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-x,\ x_0=-2$;

4) $f(x)=x^{-3}-\frac{2}{x^2}+3x,\ x_0=3$;

5) $f(x)=x^2\ln(2-x),\ x_0=1$;

6) $y=x^3e^x,\ x_0=-1$;

7) $f(x)=\frac{\ln x}{x},\ x_0=1$;

8) $y=\frac{\cos x}{\sin x},\ x_0=\frac{\pi}{4}$.

672. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x)=\sin 2x-x$;

2) $f(x)=\cos 2x+2x$;

3) $f(x)=(2x-1)^3$;

4) $f(x)=(1-3x)^5$.

673. Показать, что $f'(1)=f'(0)$, если $f(x)=(2x-3)\cdot(3x^2+1)$.

674. Найти значения x, при которых значения производной функции $f(x)=x^3-1{,}5x^2-18x+\sqrt{3}$ отрицательны.

675. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x)=\sin x+\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{2}$;

2) $f(x)=\cos 3x,\ x_0=\frac{\pi}{6}$.

676. Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x)=\frac{1}{4x^2}-\sqrt{x},\ x_0=1$;

2) $f(x)=2x\sqrt{x},\ x_0=\frac{1}{3}$.

677. Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x)=\frac{3}{4x\sqrt{x}}$, $x_0=\frac{1}{4}$;

2) $f(x)=2x^4-x^2+4$, $x_0=-1$.

678. Исследовать функцию $y=f(x)$ и построить ее график:

1) $f(x)=4x^3+6x^2$; 2) $f(x)=3x^2-2x^3$;

3) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$; 4) $f(x)=x^4-\frac{1}{2}x^2$.

679. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y=\sqrt{x+5}$ на отрезке $[-1; 4]$;

2) $y=x^2-\frac{1}{x}$ на отрезке $[1; 2]$;

3) $y=3\sin x+4\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

4) $y=\sin x+2\sqrt{2}\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

5) $y=\ln x-x$ на отрезке $[0{,}5; 4]$;

6) $y=2xe^{2x}$ на отрезке $[-1; 1]$;

7) $y=x\sqrt[3]{5-3x^2}$ на отрезке $\left[0; \sqrt{\frac{5}{3}}\right]$;

8) $y=x\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[0; 1]$.

680. Периметр осевого сечения цилиндра 6 дм. При каком радиусе основания цилиндра его объем будет наибольшим?

681. Найти наибольший возможный объем цилиндра, площадь полной поверхности которого равна 54π см^2, если известно, что радиус основания не меньше 2 см и не больше 4 см.

682. В правильной пирамиде $SABC$ из вершины S проведена высота SO. Найти сторону основания пирамиды, если объем пирамиды является наибольшим при условии, что $SO+AC=9$ и $1\leqslant AC\leqslant 8$.

683. В правильной четырехугольной призме диагональ равна $2\sqrt{3}$. При какой высоте призмы ее объем наибольший?

684. Для функции $f(x)=x^{-2}+\cos x$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M\left(0{,}5\pi; -\frac{2}{\pi}\right)$.

685. Вычислить:

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$; 3) $\int\limits_{-2}^{1} (x^2+2x+3)\,dx$;

4) $\int\limits_{1}^{2} (x^2-6x+8)\,dx$; 5) $\int\limits_{e}^{2e} \left(1+\frac{1}{x}\right) dx$; 6) $\int\limits_{1}^{3} (x^{-2}+1)\,dx$;

7) $\int\limits_{0}^{1} \frac{2}{3-2x}\,dx$; 8) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{5-4x}\,dx$.

686. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=4x-x^2$, $y=5$, $x=0$, $x=3$;

2) $y=x^2-2x+3$, $x=1$, $x=2$, $y=1$;

3) $y=\frac{4}{x}$, $y=-x^2+4x+1$;

4) $y=x^2-2x+8$, $y=6$, $x=-1$, $x=3$;

5) $y=\sin x$, $y=0$, $x=\frac{2\pi}{3}$, $x=\pi$;

6) $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{6}$.

---

687. Пуля вылетает из пистолета вверх со скоростью 360 м/с. Найти скорость пули в момент $t=10$ с и определить, сколько времени пуля поднимается вверх. Уравнение движения пули $h=v_0t-4{,}9t^2$.

688. Колесо вращается так, что угол поворота прямо пропорционален кубу времени. Первый оборот был сделан колесом за 2 с. Определить угловую скорость колеса через 4 с после начала вращения.

Найти производную функции **(689—691)**.

689. 1) $y=\frac{x^5-3x^3+2x^2-x+3}{x^3}$; 2) $y=10x^{-\frac{1}{2}}-5x^{-0{,}4}+10x^{-0{,}2}$;

3) $y=x\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}$; 4) $y=\frac{6x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$.

690. 1) $y=\frac{3x^2-2x+1}{x+1}$; 2) $y=\frac{2x^2-3x+1}{2x+1}$;

3) $y=\frac{\ln x+2}{x}$; 4) $y=\frac{4\ln x}{1+\ln x}$.

691. 1) $y=(2x+1)^2\cdot\sqrt{x-1}$; 2) $y=x^2\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}$;
3) $y=\sin 2x\cdot\cos 3x$; 4) $y=x\cdot\cos 2x$.

692. Найти значения x, для которых производная функции $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ равна -1.

693. Определить знак числа $f'(2)$, если:

1) $f(x)=e^{3-2x}\cdot x^2$; 2) $f(x)=\frac{x^2}{e^{1-x}}$.

694. Дана функция $f(x)=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$. Найти $f'(0)$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

695. Найти значения x, при которых $f'(x)\leqslant g'(x)$, если $f(x)=x^3+x^2+x\sqrt{3}$, $g(x)=x\sqrt{3}+1$.

696. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y=x^3-x+1$ в точке пересечения его с осью Oy.

697. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y=3x^3-1$ в точке с ординатой $y=2$.

698. Прямая $y=4x-3$ является касательной к параболе $y=6-2x+x^2$. Вычислить координаты точки касания.

699. Найти точки, в которых касательные к графику функции $y=4x^3-9x^2+6x+1$ параллельны оси абсцисс.

700. На параболе $y=3x^2+7x+1$ найти такую точку, в которой касательная к параболе образует угол $\frac{\pi}{4}$ с осью абсцисс.

701. Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x)=x\ln 2x$, $x_0=0{,}5$; 2) $f(x)=2^{-x}$, $x_0=1$;

3) $f(x)=\frac{9x^2}{\sqrt{x}}$, $x_0=\frac{1}{9}$; 4) $f(x)=x^3e^{1-x}$, $x_0=1$.

702. Найти промежутки монотонности функции:

1) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 2) $y=\frac{x^2-1}{x}$.

Найти точки экстремума функции **(703—704)**.

703. 1) $y=(x-1)^3(x-2)^2$; 2) $y=4+(6-x)^4$.

704. 1) $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$; 2) $y=\frac{x^2+6x+3}{3x+4}$.

705. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке:

1) $y=2\sin x+\sin 2x$, $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

2) $y=2\sin x+\cos 2x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

706. Исследовать функцию и построить ее график:

1) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+9$;
2) $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-9$;
3) $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+\frac{7}{4}$;
4) $y=-x^4+6x^2-9$;
5) $y=\frac{x^2+1}{x}$;
6) $y=\frac{x^2+2}{2x}$.

707. Каковы должны быть коэффициенты p и q квадратичной функции $y=x^2+px+q$, чтобы при $x=5$ она имела минимум, равный 1?

708. Какой должна быть высота конуса с образующей в 20 дм, чтобы его объем был наибольшим?

709. Какую наименьшую площадь поверхности имеет цилиндр, если его объем равен V?

710. Найти радиус основания цилиндра, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.

711. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

712. Найти высоту конуса максимального объема, вписанного в шар радиуса R.

713*. В конус с заданным объемом V вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным α. При каком значении α объем пирамиды будет наибольшим?

714. Для функции $f(x)=\cos 4x$ найти первообразную $F(x)$, если $F\left(\frac{\pi}{24}\right)=-1$.

715. Найти первообразную функции:

1) $y=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$;
2) $y=\frac{3}{4x-1}$.

716. Вычислить:

1) $\int\limits_0^1 (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})\,dx$;
2) $\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$;
3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (1-2\sin^2 x)\,dx$;
4) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 x-1)\,dx$;
5) $\int\limits_2^3 \frac{x^2-2}{x+1}\,dx$;
6) $\int\limits_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$.

717. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=\sqrt{x-1}$, $y=3-x$, $y=0$;

2) $y=-x^2+6x-2$, $y=x^2-2x+4$;

3) $y=-\frac{16}{x}$, $y=-x^3$, $y=1$; 4) $y=-\frac{1}{x}$, $y=x^2$, $y=\frac{x^3}{8}$.

718*. Найти все значения b, при каждом из которых функция $f(x)=\sin 2x-8(b+2)\cos x-(4b^2+16b+6)x$ является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет стационарных точек.

719*. Найти все значения x, при которых касательные к графикам функций $y=3\cos 5x$ и $y=5\cos 3x+2$ в точках с абсциссой x параллельны.

720*. Через точку $A\left(2;\ -\frac{12}{5}\right)$ проведена касательная к параболе $y=-\frac{3}{5}x^2$, пересекающая ось абсцисс в точке B, а ось ординат в точке C. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник BOC (O — начало координат).

721.** Через точку $A\,(3;\ -4)$ проведена касательная l к гиперболе $y=-\frac{12}{x}$. Найти радиус окружности с центром на оси ординат, касающейся прямой l и оси абсцисс.

722.** Сигнал с корабля можно различить в море на расстоянии 1 мили. Корабль A идет на юг, делая 3 мили в час, и в настоящее время находится в 5 милях к западу от корабля B, который идет на запад со скоростью 4 мили в час. Будут ли корабли на расстоянии, достаточном для приема сигнала?

723.** Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=0{,}5x^2-2x+2$ и касательными к ней, проведенными через точки $A\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ и $B\,(4;\ 2)$.

724.** Через точку графика функции $y=\sqrt{x}$ с абсциссой a, где $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$, проведена касательная к этому графику. Найти значение a, при котором площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и прямой $x=3$, будет наименьшей, и вычислить эту наименьшую площадь.

725.** Дана фигура, ограниченная кривой $y=\sin x$ и прямыми $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. Под каким углом к оси Ox нужно провести прямую через точку (0; 0), чтобы эта прямая разбивала данную фигуру на две фигуры равной площади?

Упражнения для итогового повторения курса алгебры

Умение решать задачи – практическое искусство, подобное плаванию, или катанию на лыжах, или игре на фортепьяно: научиться этому можно, лишь подражая избранным образцам и постоянно тренируясь...

Д. Пойа

1. Числа и алгебраические преобразования **(726—779)**.
2. Уравнения **(780—819)**.
3. Неравенства **(820—845)**.
4. Системы уравнений и неравенств **(846—852)**.
5. Текстовые задачи **(853—872)**.
6. Функции и графики **(873—923)**.
7. Комбинированные задания **(924—929)**.
8. Задачи, предлагавшиеся на выпускных экзаменах **(930—933)**.

1. Числа и алгебраические преобразования

726. Найти 2,5% от 3,2.
727. Найти число, если 42% его составляют 12,6.
728. Какой процент составляет 1,3 от 39?
729. Сколько процентов составляет 46,6 от 11,65?
730. Найти число, 175% которого составляют 78,75.
731. Найти 180% от 7,5.

Пойа Дьердь (1887—1985) — американский математик, родился в Венгрии. Основные исследования относятся к теории вероятностей, математической физике, теории чисел. Основоположник современной эвристики (раздела психологии, изучающего закономерности творческого мышления).

732. Цена товара была снижена сначала на 24%, а затем на 50% от новой цены. Найти общий процент снижения цены товара.

733. В сплаве содержится 18 кг цинка, 6 кг олова и 36 кг меди. Каково процентное содержание составных частей сплава?

734. Стоимость товара и перевозки составляет 394 р. 20 к., причем расходы по перевозке товара составляют 8% стоимости самого товара. Какова стоимость товара без учета стоимости его перевозки?

735. Высота пирамиды равна 5 см, а площадь ее основания равна 4 $см^2$. На сколько процентов увеличится объем этой пирамиды, если и площадь ее основания, и высоту увеличить на 10%?

736. При делении некоторого числа на 72 получится остаток, равный 68. Каким будет остаток, если это же число разделить на 12?

737. Сумма двух чисел равна 1100. Найти наибольшее из них, если 6% одного числа равны 5% другого.

738. По вкладу, вносимому на срок не менее года, сбербанк выплачивает 3% годовых. Вкладчик внес в сбербанк вклад в размере 600 р. Какую сумму денег он получит в конце второго года со дня вклада? в конце третьего года со дня вклада?

739. По обычному вкладу сбербанк выплачивает 2% годовых. Вкладчик внес 500 р., а через месяц снял со счета 100 р. Какая сумма денег будет на его счету по истечении года со дня выдачи ему 100 р.?

Вычислить **(740—741)**.

740. 1) $\dfrac{5{,}48+8{,}02}{(7{,}97+8{,}77):3{,}72}$; 2) $\dfrac{20{,}88:18+45:0{,}36}{19{,}59+11{,}95}$;

3) $23{,}276:2{,}3-3{,}6\cdot(17{,}2\cdot 0{,}125+0{,}005:0{,}1)+6{,}25\cdot 3{,}2$;

4) $9{,}25\cdot 1{,}04-(6{,}372:0{,}6+1{,}125\cdot 0{,}8):1{,}2+0{,}16\cdot 6{,}25$.

741. 1) $\dfrac{\left(28:1\frac{3}{4}+7\frac{1}{3}:22+1\frac{2}{3}\cdot 9\frac{3}{4}+14:1\frac{1}{2}\right)\cdot 3\frac{1}{7}}{10\frac{1}{2}-9\frac{3}{4}}$;

2) $\dfrac{\left(6\frac{2}{3}+2\frac{4}{15}+5\frac{1}{2}\right):\frac{1}{15}-30:\frac{5}{28}}{\left(5\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{22}\right)\cdot 48\frac{1}{2}}$;

3) $\left(0{,}645:0{,}3-1\frac{107}{180}\right)\cdot\left(4:6{,}25-1:5+\frac{1}{7}\cdot 1{,}96\right)$;

4) $\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-0{,}108)$.

742. Найти неизвестный член пропорции:

1) $10:\frac{1}{8}=x:1\frac{1}{4}$; 2) $x:0{,}75=9\frac{1}{2}:14\frac{1}{4}$;

3) $\frac{0{,}3}{x}=\frac{\overline{9}}{3\frac{1}{3}}$; 4) $\frac{x}{15}=\frac{1{,}456}{1{,}05}$.

Вычислить **(743—745)**.

743. 1) $(625^{-\frac{1}{4}}\cdot 75^{0,5}-8{,}7^0)\cdot\left(\frac{1}{3^{-0,5}}+1\right)$;

2) $\left(\frac{15\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{-\frac{1}{3}}}-2\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot 49^{\frac{1}{4}}\right)\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}+45^{\frac{1}{2}}\right)-183\sqrt{5}$.

744. 1) $\left(2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{8}}$; 2) $(2^{\sqrt{27}})^{\sqrt{3}}\cdot 2^{-3}$;

3) $(3^{1-\sqrt{3}})^{1+\sqrt{3}}$; 4) $(5^{\sqrt{5}+\sqrt{3}})^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

745. 1) $\log_8\sqrt{2}$; 2) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{32}$; 3) $5^{2+\log_5 2}$;

4) $(\sqrt{3})^{2-\log_{\sqrt{3}}7}$; 5) $\log_3\frac{9}{\sqrt[5]{3}}+\log_6\sqrt[5]{36}$; 6) $16^{0,5\log_4 10+1}$.

746. Какое из чисел больше:

1) $\sqrt{8}$ или $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}}9}$; 2) $\sqrt{5}$ или $9^{\log_3\sqrt{2}+\log_{\frac{1}{9}}\frac{8}{9}}$;

3) $\sqrt{18}$ или $4^{\log_2 3+\log_4\frac{5}{11}}$;

4) $\sqrt[3]{18}$ или $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5}$?

Упростить **(747—748)**.

747. 1) $\frac{2\sqrt[6]{4\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}$; 2) $\left(\frac{\sqrt[3]{9\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right)^3$;

3) $3\sqrt{\frac{5}{9}}-\frac{1}{2}\sqrt{20}+3\sqrt{180}-4\sqrt{\frac{125}{4}}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$;

5) $(m-n)\cdot\sqrt{\frac{k}{m^2-2mn+n^2}}$, $m>n>0$, $k>0$;

6) $\sqrt{b^2+2b\sqrt{2}+2}+\sqrt{b^2-2b\sqrt{2}+2}$, $b>\sqrt{2}$.

748. 1) $\sqrt{a^4(9a^2-6a+1)}$; 2) $\sqrt{b^2(4b^4+4b^2+1)}$;

3) $\frac{a}{1-\sqrt{a}}+\frac{a}{1+\sqrt{a}}$ при $a>0$, $a\neq 1$;

4) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$ при $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

749. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{12}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{10}{\sqrt{5}}$; 3) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; 4) $\frac{b}{2\sqrt{a}}$;

5) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 6) $\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$; 7) $\frac{12}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}$; 8) $\frac{8}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$.

750. Освободиться от иррациональности в числителе дроби:

1) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{10}$; 3) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$;

4) $\frac{3\sqrt{6}}{6}$; 5) $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{3}$; 6) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$.

751. Записать в виде обыкновенной дроби число:
1) 0,(4); 2) 2,(7); 3) 0,(21); 4) 1,(36); 5) 0,3(5); 6) 0,21(3).

752. Записать в виде десятичной периодической дроби следующие числа:

1) $\frac{5}{6}$; 2) $2\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) $5\frac{2}{11}$.

753. Может ли быть рациональным числом:
1) сумма двух положительных иррациональных чисел;
2) произведение двух иррациональных чисел;
3) частное от деления суммы двух неравных иррациональных положительных чисел на их произведение?

754. Доказать, что если a и b — натуральные числа и $\sqrt{ab}$ — рациональное число, то $\sqrt{\frac{a}{b}}$ также рациональное число, а если $\sqrt{ab}$ — иррациональное число, то и $\sqrt{\frac{a}{b}}$ — иррациональное число.

755. Пусть a — рациональное число, b — иррациональное число, причем $a\neq 0$. Доказать, что $a+b$, $a\cdot b$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ — иррациональные числа.

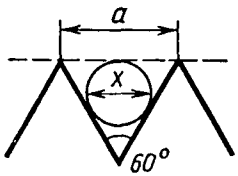


Рис. 95

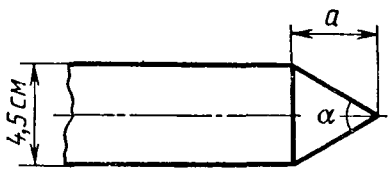


Рис. 96

756. Имеют ли общие точки промежутки:

1) $[1;\ 3\sqrt{2}+2\sqrt{7}]$ и $[3\sqrt{3}+4;\ 15]$;

2) $(0;\ \sqrt{27}+\sqrt{6})$ и $(\sqrt{48}-1;\ 10)$;

3) $[2;\ 2\sqrt{5}+2\sqrt{6}]$ и $(3\sqrt{2}+\sqrt{22};\ 11)$;

4) $[1;\ 1+\sqrt{3}]$ и $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1};\ 4\right)$?

757. Пусть $0<a<b$. Доказать, что на числовой оси:

1) точка $\frac{a+b}{2}$ — середина отрезка $[a;\ b]$;

2) точка $\frac{a-b}{2}$ — середина отрезка $[-b;\ a]$;

3) точка $\frac{b-a}{2}$ — середина отрезка $[-a;\ b]$;

4) точка $\frac{-a-b}{2}$ — середина отрезка $[-b;\ -a]$;

5) точка $\frac{a+bc}{1+c}$, где $c>0$, лежит внутри отрезка $[a;\ b]$.

758. 1) Вычислить диаметр круга x, вписанного в равносторонний треугольник (рис. 95), если $a=6$ см.

2) Вычислить угол α заготовки, изображенной на рисунке 96, если $a=4$ см.

759. Вычислить ширину l ущелья по данным, указанным на рисунке 97.

760. Вычислить длину моста по данным, указанным на рисунке 98.

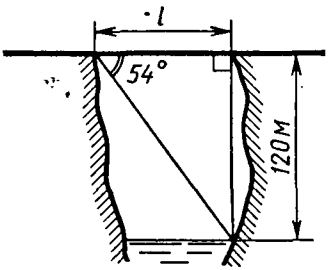


Рис. 97

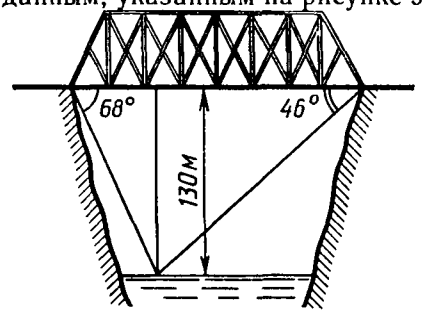


Рис. 98

761. Найти числовые значения всех остальных тригонометрических функций по данному значению одной из них $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$:

1) $\cos\alpha=0{,}8$;

2) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=2{,}4$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{24}$.

762. Вычислить:

1) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

3) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}2)$;

5) $\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

6) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}3)$.

763. Вычислить:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{5}$;

2) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5}$;

3) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$;

4) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

Упростить **(764—769)**.

764. 1) $\frac{a^2+3a+2}{a^2-25}\cdot\frac{10-2a}{a+2}$;

2) $\frac{b^2-1}{b^2+2b-3}\cdot\frac{2b+1}{b+1}+\frac{b+2}{b+3}$;

3) $\frac{a+2}{a-2}\cdot\left(\frac{2a^2-a-3}{a^2+5a+6}:\frac{2a-3}{a-2}\right)$;

4) $\left(2+\frac{1}{b}\right):\frac{8b^2+8b+2}{b^2-4b}\cdot\frac{2b+1}{b}$.

765. 1) $\left(\frac{1+2m}{1+m}+\frac{1}{m}\right):\left(\frac{1+2m}{m}-\frac{1}{1+m}\right)$;

2) $\left(\frac{a^2}{2b^2}-4+\frac{8b^2}{a^2}\right):\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right)$;

3) $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a-1}-\frac{2a^3}{a^4-1}$;

4) $\frac{1}{a^2+5a+6}+\frac{2a}{a^2+4a+3}+\frac{1}{(a+1)^2+a+1}-\frac{2}{a+3}$.

766. 1) $\dfrac{1}{4+4\sqrt{a}}-\dfrac{1}{2-2a}+\dfrac{1}{4-4\sqrt{a}}$;

2) $\dfrac{a\sqrt{2}+a-\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}-2-\sqrt{2}+2a}$.

767. 1) $\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2+ab}}-\dfrac{\sqrt{ab+b^2}}{\sqrt{ab}+b}\right)^{-2}-\dfrac{\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}}{2ab}$;

2) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{2\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}$;

3) $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{b}}$;

4) $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

768. 1) $\dfrac{(ab^{-2}+a^{-2}b)^{-1}\cdot(a^{-3}+b^{-3})}{\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{5}}}\right)^{-10}}$;

2) $\left(\dfrac{9a-25a^{-1}}{3a^{\frac{1}{2}}-5a^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{a+7+10a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{1}{2}}}\right)^4$.

769. 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}-a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}-2a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}+a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}}$;

2) $\left(\dfrac{3\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b^4}-9\sqrt[3]{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}-\dfrac{9}{\sqrt{b}}}\right)^{-2}-(b^2+18b+81)^{0,5}$;

3) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1$;

4) $\dfrac{\left(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt[5]{a^4})^3}\cdot\dfrac{(\sqrt{a^3\sqrt{a^2b}})^4}{(\sqrt[4]{a\sqrt{b}})^6}$.

770. Разложить на множители:

1) $1+\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $1-\cos\alpha-\sin\alpha$;
3) $3-4\sin^2\alpha$; 4) $1-4\cos^2\alpha$.

771. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то:

1) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$;

2) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

Упростить выражение **(772—774)**.

772. 1) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha$; 2) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$;

3) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; 4) $\frac{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}$;

5) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$; 6) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

773. 1) $\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}$;

3) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$; 4) $\frac{\cos^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)}{\sin 2\beta}$;

5) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$; 6) $\frac{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}$.

774. 1) $1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}$;

2) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\cdot\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)}+\cos^2\alpha$;

3) $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$;

4) $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$.

Доказать тождество **(775—779)**.

775. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$;

3) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$;

4) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

776. 1) $\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha$;

2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha$.

777. 1) $(1+\cos\alpha)\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$;

2) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

4) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$.

778. 1) $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$;

2) $1-\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

779. $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha=4\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

2. Уравнения

780. Решить уравнение:

1) $\frac{2x+4}{5}=2-\frac{6-7x}{15}$; 2) $1{,}5-\frac{x}{3}=\frac{2x-5}{6}-\frac{x-4}{3}$;

3) $\frac{3x-16}{12}+1=\frac{x+6}{4}-\frac{x+3}{6}$;

4) $\frac{5}{3}(x-7)-3x-\frac{6(x-8)}{7}=-\left(x+\frac{43}{3}\right)$.

781. При каком значении a уравнение $a(x-3)+8=13(x+2)$ имеет корень, равный 0?

782. При каком значении b уравнение $1-b(x+4)=2(x-8)$ имеет корень, равный 1?

Решить уравнение **(783—794)**.

783. 1) $x(x+1)-(x+2)(x+3)+9=x(x+4)-(x+5)(x+2)$;
2) $2(x+3)(x+1)+8=(2x+1)(x+5)$.

784. 1) $\frac{3x}{x+1}+\frac{x-1}{x-2}=4$; 2) $\frac{3x}{x+5}-1=\frac{2x+5}{x}$;

3) $\frac{5}{3x+7}=\frac{7}{5x+9}$; 4) $\frac{4x^2-1}{4x^2-16x+7}-1=\frac{2}{2x-1}+\frac{2}{2x-7}$;

5) $\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x-3}=\frac{4}{x^2-9}$; 6) $\frac{5}{x-2}+\frac{2}{x-4}=\frac{11}{x^2-6x+8}$.

785. 1) $(a-b)x=a^2+(a+b)x$;
2) $a^2x=a+b+b^2x$.

786. 1) $x^2-2x-15=0$; 2) $3x^2+4x-4=0$; 3) $7x^2+4x=0$;
4) $12x^2-4x=0$; 5) $2x^2-x=1$; 6) $4x^2-100=0$.

787. 1) $\frac{x^2}{12}=\frac{7x}{12}-1$;

2) $2x-\frac{10}{3}=\frac{x^2}{6}$;

3) $(x-3)(x-2)=6(x-3)$;

4) $x^2-\frac{11x}{6}+\frac{1}{2}=0$.

788. 1) $x-1=\frac{1}{x-1}$;

2) $\frac{x^2+12}{x-3}=\frac{7x}{x-3}$;

3) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=0$;

4) $\frac{3x^2}{3x-1}-2=\frac{2x+1}{3x+1}$.

789. 1) $\frac{3x-1}{x+2}-\frac{7}{2+x}=\frac{7x^2-28}{x^2-4}+\frac{18}{2-x}$;

2) $\frac{x+1}{x+3}-\frac{12}{x^2-9}=\frac{2-x}{3-x}$.

790. 1) $\frac{2x}{x-3}+\frac{1}{2x+3}+\frac{3x+9}{2x^2-3x-9}=0$;

2) $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^3+1}$

791. 1) $x-4+\frac{1}{x}=0$;

2) $\frac{4x^2}{x+2}-\frac{10}{x+2}+4=0$.

792. 1) $x^4-7x^2+12=0$;

2) $x^4-11x^2+30=0$;

3) $x^4-13x^2+36=0$;

4) $2x^4-5x^2+2=0$;

5) $x-2\sqrt{x}=15$;

6) $4\sqrt{x}+x-5=0$.

793. 1) $2x^{-2}+4x^{-1}+3=0$;

2) $(x^2-x)^2+12=8(x^2-x)$;

3) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\frac{x-1}{x}\right)+2=0$;

4) $\frac{3x^2}{(x-1)^2}-\frac{5x}{x-1}-2=0$.

794. 1) $x^2-3ax-b^2+\frac{9a^2}{4}=0$;

2) $x^2+ax-b^2+\frac{a^2}{4}=0$;

3) $\frac{x}{x-b}+\frac{2x}{x+b}=\frac{b^2}{4(x^2-b^2)}$;

4) $\frac{2x}{2x-a}-\frac{x}{2x+a}=\frac{5a^2}{4x^2-a^2}$.

795. При каком условии трехчлен ax^2+bx+c является квадратом двучлена?

796. Доказать, что корни уравнения $ax^2+bx+a=0$ есть взаимно обратные числа, если $a\neq 0$.

Решить уравнение **(797—798)**.

797. 1) $|2x-3|=7$;

2) $|x+6|=2x$;

3) $\left|\frac{x}{2}-\frac{5}{4}\right|=x-1$;

4) $2x-7=|x-4|$.

798. 1) $|6-2x|=3x+1$;

2) $2|x-2|=|x|-1$;

3) $|3x-1|+|4-x|=5$;

4) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=x-1$.

799. Найти наименьший корень уравнения $|x^2-3x-6|=2x$.

800. Найти наибольший рациональный корень уравнения

$$|x^2-8x+5|=2x.$$

Решить уравнение **(801—808)**.

801. 1) $\sqrt{2x+7}=x+2$;

2) $x=2-\sqrt{2x-5}$;

3) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$;

4) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$;

5) $\frac{6-x}{\sqrt{x+9}}=\sqrt{8-3x}$;

6) $\frac{2-x}{2-\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{2-x}{2}}$.

802. 1) $3^{x-7}=81$;

2) $2^{x^2-5x+6,5}=\sqrt{2}$;

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-7}=\left(\frac{5}{4}\right)^{3x-7}$;

4) $\left(\frac{1}{4}\cdot 4^x\right)^x=2^{2x+6}$.

803. 1) $9^{5x}-9^{5x-1}=8$;

2) $2^{x+4}-2^x=120$;

3) $4^{x-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}+\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3-x}{2}}=208$;

4) $4^x-4^{x-1}+4^{x-2}=52$.

804. 1) $5^{2x+5}\cdot 7^{3x+1}=35^{\frac{1}{2}(5x+6)}$;

2) $(0{,}2)^{x^2}\cdot 5^{2x+2}=\left(\frac{1}{5}\right)^6$.

805. 1) $2\lg x-\lg 5=5+3\lg 2$;

2) $1-\lg 2=\frac{1}{2}\left(\lg\frac{1}{3}+\lg x+\frac{1}{2}\lg 3\right)$;

3) $\lg\left(\frac{1}{2}+x\right)=\lg\frac{1}{2}-\lg x$;

4) $2\lg x=-\lg\frac{1}{6-x^2}$.

806. 1) $\log_2(2x-18)+\log_2(x-9)=5$;

2) $\lg(x^2+19)-\lg(x+1)=1$.

807. 1) $5^{\log_3 x^2}-6\cdot 5^{\log_3 x}+5=0$;

2) $25^{\log_3 x}-4\cdot 5^{\log_3 x+1}=125$;

3) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$;

4) $\lg 10+\frac{1}{3}\lg(271+3^{\sqrt{2x}})=2$.

808. 1) $\lg(3^{x-2}-2)=0$;

2) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$;

3) $x^{\lg x}=10$;

4) $x^{\log_3 x}=9x$;

5) $x^{\lg x}-1=10(1-x^{-\lg x})$;

6) $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$.

809. Могут ли корни уравнения $(x-m)(x-n)=k^2$ быть чисто мнимыми, если m, n и k — действительные числа?

810. Решить уравнение (z — комплексное число):

1) $z^2+2z+5=0$;
2) $z^2-6z+10=0$;
3) $9z^2-6z+10=0$;
4) $4z^2+16z+17=0$;
5) $z^2+4z+19=0$;
6) $z^2-2z+3=0$.

Решить уравнение (811—819).

811. 1) $\sin 2x=3\cos x$; 2) $\sin 4x=\cos^4 x-\sin^4 x$;
3) $2\cos^2 x=1+4\sin 4x$;
4) $2\cos 2x+2\cos x\cdot\sin^2 x=\cos x$;
5) $\sin 2x+2\sin x-3\cos x=3$;
6) $2\cos x+\cos 2x=2\sin x$.

812. 1) $\sin^3 x+\cos^3 x=0$; 2) $2\sin^2 x+\sin^2 2x=2$;
3) $8\sin x\cdot\cos 2x\cdot\cos x=\sqrt{3}$;
4) $4\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x=\cos 4x$;
5) $2\sin^2 x+3\sin^2 2x=0$.

813. 1) $\sin^3 x\cdot\cos x+\cos^3 x\cdot\sin x=\cos 2x$;
2) $\cos^2 x+7\sin^2 x=8\cos x\cdot\sin x$;
3) $9\sin x\cdot\cos x+5\sin^2 x=7$;
4) $2+\cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=\sin^2 x$.

814. 1) $\sin 5x=\sin 3x$; 2) $\cos 6x+\cos 2x=0$;
3) $\sin 3x+\cos 7x=0$; 4) $\sin x=\cos 5x$.

815. 1) $\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}$;

2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$;
3) $\sin x+\sin 5x=\sin 3x$;
4) $\cos 7x-\cos 3x=3\sin 5x$.

816. 1) $5+\sin 2x=5(\sin x+\cos x)$;
2) $\sin 2x=(\sqrt{2}-1)(1+\sin x+\cos x)$;
3) $5+\sin x+2\sin x\cdot\cos x=\cos x$;
4) $2+2\cos x=3\sin x\cdot\cos x+2\sin x$.

817. 1) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$;
2) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$.

818. 1) $\operatorname{tg}^2 3x-4\sin^2 3x=0$; 2) $\sin x\cdot\operatorname{tg} x=\cos x+\operatorname{tg} x$;

3) $\operatorname{ctg} x\left(\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}\right)=1$; 4) $4\operatorname{ctg}^2 x=5-\frac{9}{\sin x}$;

5) $\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$; 6) $\sin x\cdot\operatorname{ctg} 3x=\cos 5x$.

819. 1) $\operatorname{tg} 2x=3\operatorname{tg} x$; 2) $\operatorname{ctg} 2x=2\operatorname{ctg} x$;

3) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2$; 4) $\operatorname{tg}(2x+1)\cdot\operatorname{ctg}(x+1)=1$.

3. Неравенства

Решить неравенство **(820—821)**.

820. 1) $x+8>4-3x$; 2) $3x+1-2(3+x)<4x+1$;

3) $\frac{x+4}{4}<x-1$; 4) $\frac{2x-5}{-3}<x$.

821. 1) $1{,}5x+3<4x+0{,}6$; 2) $\frac{3x-8}{4}-9>x-\frac{2x-37}{3}$;

3) $10x-\frac{6x-7}{2}<\frac{20x+1}{3}$; 4) $\frac{7-x}{9}-\frac{2+3x}{3}>0$;

5) $\frac{4-3x}{8}-\frac{5-2x}{12}<2$; 6) $\frac{5x-7}{6}-\frac{x+2}{7}\geqslant 2$.

822. При каких значениях x положительна дробь:

1) $\frac{2x-1}{7}$; 2) $\frac{2x-1}{3x-2}$; 3) $\frac{21x-5}{6-3x}$; 4) $\frac{3-11x}{4}$;

5) $\frac{5x-4}{7x+5}$; 6) $\frac{3x+10}{40-x}$; 7) $\frac{x+2}{5-4x}$; 8) $\frac{8-x}{6+3x}$?

823. При каких значениях x отрицательна дробь:

1) $\frac{11x-23}{7}$; 2) $\frac{3-2x}{3x-2}$; 3) $\frac{4x+9}{2x-5}$;

4) $\frac{10-4x}{9x+2}$; 5) $\frac{6-5x}{x^2}$; 6) $\frac{18-7x}{-4x^2-1}$?

824. Решить неравенство:

1) $\frac{3x+2}{x-1}<2$; 2) $\frac{5x+4}{x-3}<4$; 3) $\frac{3}{2x+3}\geqslant\frac{2}{3}$;

4) $\frac{2}{x-4}<1$; 5) $\frac{2}{x-1}<\frac{3}{x-4}$; 6) $\frac{2}{x+3}\leqslant 4$.

825. Решить квадратное неравенство:

1) $x^2-3x-4>0$; 2) $x^2-6x\geqslant 8x-45$;

3) $x^2-8x+7\leqslant 0$; 4) $4x+21-x^2>0$;

5) $26-11x-x^2<0$; 6) $3x^2-2x+7>0$;

7) $3x^2+4x-4\geqslant 0$; 8) $-\frac{1}{2}x^2+x-5>0$;

9) $8x^2-2x-1<0$; 10) $5x^2+7x\leqslant 0$.

Решить неравенство **(826—827)**.

826. 1) $\frac{x^2-9}{x^2-4}<0$;

2) $(2x^2+3)(x+4)^3>0$.

827. 1) $\frac{3x-6}{2x^2+5x-3}<0$; 2) $\frac{3x-15}{x^2+5x-14}\geqslant 0$; 3) $\frac{5x^2+4x-1}{6-2x}\leqslant 0$;

4) $\frac{x-1}{x^2+4x+2}<0$; 5) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}<0$; 6) $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x-3}>0$.

828. При каких значениях x выражение $\lg(x^2+8x+15)$ не имеет смысла?

829. При каком наименьшем целом значении m уравнение $(m-1)x^2-2(m+1)x+m-3=0$ имеет два различных действительных корня?

830. При каких целых значениях m уравнение $(m-7)x^2+2(m-7)x+3=0$ не имеет действительных корней?

831. При каком наибольшем целом значении x выражение $\frac{\frac{1}{2}x^2+3}{x^2-9x+14}$ принимает отрицательное значение?

832. При каком наименьшем целом значении x выражение $\frac{x^2-x-6}{-7-x^2}$ принимает положительное значение?

Решить неравенство **(833—841)**.

833. 1) $|x-3|<6$; 2) $|x-3{,}4|>0{,}6$; 3) $|x-7|>2$;

4) $|2x-3|<0{,}5$; 5) $|2x-3|<x$; 6) $|4-x|>x$;

7) $|x^2-7x+12|\leqslant 6$; 8) $|x^2-3x-4|>6$;

9) $|2x^2-x-1|\geqslant 5$; 10) $|3x^2-x-4|<2$.

834. 1) $2^{-x+5}<\frac{1}{4}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|}>\frac{1}{27}$;

3) $4^{x^2+x-12}>1$; 4) $3^{\frac{\frac{2}{3}x-1}{2x+3}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$.

835. 1) $3^{x+1}\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt[3]{3}$, 2) $3^{x+1}+3^{x-1}<10$.

836. 1) $2^{2x}-4^{x-1}+8^{\frac{2}{3}x}\cdot 2^{-4}>52$;

2) $2^{x+2}-2^{x+3}+5^{x-2}>5^{x+1}+2^{x+4}$.

837. 1) $3^{\log_2\frac{x-1}{x+2}}<\frac{1}{9}$; 2) $5^{\log_2(x^2-4x+3{,}5)}>\frac{1}{5}$.

838. 1) $\log_6(2-x)<\log_6(2x+5)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2)\geqslant -1$.

839. 1) $4^{\log_{0.25}(3-2x)}<2$; 2) $\frac{\log_3(x-1)}{2x-1}<0$;

3) $\sqrt{\lg x}<\frac{1}{2}$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}(2x+6)+2$.

840. 1) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x+1}{x-1}\right)\leqslant 0$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2-5))>0$;

3) $\log_\pi(x+27)-\log_\pi(16-2x)<\log_\pi x$.

841. 1) $\cos(-3x)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$;

3) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{4}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

842. С помощью графика решить неравенство:

1) $\sin x<\frac{1}{4}$; 2) $\sin x>-\frac{1}{4}$;

3) $\operatorname{tg} x-3\leqslant 0$; 4) $\cos x>\frac{1}{3}$.

Доказать неравенство **(843—845)**.

843. 1) $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$;

2) $\frac{a^3+b^3}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, если $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

844. 1) $(a+b)(ab+1)\geqslant 4ab$, если $a>0$, $b>0$;

2) $a^4+6a^2b^2+b^4>4ab(a^2+b^2)$, если $a\neq b$.

845. 1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$;

2) $2a^2+b^2+c^2\geqslant 2a(b+c)$;

3) $a^2+ab+b^2+2a-2b+4\geqslant 0$;

4) $3(1+a^2+a^4)\geqslant(1+a+a^2)^2$, если $a>0$.

4. Системы уравнений и неравенств

Решить систему уравнений **(846—847)**.

846. 1) $\begin{cases}3x-2y=5,\\6x+2y=7;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x-7y=3,\\6x+5y=17;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x-3y-1=0,\\x+3y-5=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2x-y-13=0,\\x+2y+1=0.\end{cases}$

847. 1) $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1,\\y=\frac{1}{2}x-3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{x-y}{5}-\frac{x+y}{2}=10,\\\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=10;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{9x-y}{7}-2y=3,\\\frac{12x+5y}{3}-3x=3;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{3}=6,\\\frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=0.\end{cases}$

Найти действительные решения системы (848—850).

848. 1) $\begin{cases} y+5=x^2, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=16, \\ \frac{x}{y}=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=20, \\ xy=96; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy=12, \\ x+y=7; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy=-30, \\ x-y=11; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+2y^2=96, \\ x=2y. \end{cases}$

849. 1) $\begin{cases} x^2+x+y=6, \\ y-x=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2=13, \\ x-y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y=4, \\ x^2+x+y=10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-3y=-5, \\ 7x+3y=23. \end{cases}$

850. 1) $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{3}{2}, \\ x^2+y^2=20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=3\frac{1}{3}, \\ x^2-y^2=8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2=13x+4y, \\ y^2=4x+13y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2+y^2-4x=40, \\ 2x^2+y^2+3x=52. \end{cases}$

851. Найти наименьшее и наибольшее целые решения системы:

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{2}-\frac{3x+5}{3}-\frac{x}{6}<3-\frac{x+4}{2}, \\ 1-\frac{2x-8}{3}+\frac{4-3x}{2}<2x-\frac{x+2}{3}. \end{cases}$$

852. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 5(1-2x)>12-\frac{4x+3}{2}, \\ 1+x<\frac{8-x}{3}-\frac{2-x}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+1}{5}-\frac{x+2}{4}<\frac{x-3}{3}+\frac{x-4}{2}, \\ \frac{x-2}{3}>1+\frac{x-5}{15}. \end{cases}$

5. Текстовые задачи

853. Пассажир поднимается по неподвижному эскалатору за 3 мин, а по движущемуся — за 45 с. За какое время поднимает эскалатор неподвижно стоящего на нем пассажира?

854. Теплоход прошел расстояние между двумя пристанями по течению реки за 7 ч, а против течения за 9 ч. Определить расстояние между пристанями, если скорость течения реки 2 км/ч.

855. Пароход должен был пройти некоторое расстояние за 2,25 суток, но оказалось, что он проходил за каждый час на 2,5 км больше, чем предполагалось, а потому прошел намеченный путь за 2 суток. Какое расстояние должен был пройти пароход?

856. Один рабочий выполняет некоторую работу за 24 дня, другой рабочий ту же работу может выполнить за 48 дней. За сколько дней будет выполнена эта работа, если рабочие будут работать вместе?

857. Бассейн наполняется двумя трубами за 7,5 ч. Одна первая труба наполняет бассейн на 8 ч быстрее, чем одна вторая. За сколько часов первая труба, работая отдельно, может наполнить бассейн?

858. При уборке урожая было собрано 4556 ц яровой пшеницы с общей площади 174 га, причем на целинных землях собрано по 30 ц с одного га, а на остальной площади — по 22 ц. Сколько гектаров целинных земель было освоено?

859. Разность двух чисел относится к их произведению как 1:24, а сумма этих чисел в 5 раз больше их разности. Найти эти числа.

860. Три дроби имеют числители, равные единице. Сумма этих дробей равна 1. Разность между первой и второй дробями равна третьей дроби. Сумма первых двух дробей в 5 раз больше третьей дроби. Найти эти дроби.

861. Бригада рабочих должна была к определенному сроку изготовить 360 деталей. Перевыполняя дневную норму на 9 деталей, бригада за день до срока перевыполнила плановое задание на 5%. Сколько деталей изготовит бригада к сроку, если будет продолжать работать с той же производительностью труда?

862. Катер направился от речного причала вниз по реке и, пройдя 36 км, догнал плот, отправленный от того же причала за 10 ч до начала движения катера. Если бы катер отправился одновременно с плотом, то, пройдя 30 км и повернув обратно, встретил бы плот на расстоянии 10 км от речного причала. Найти собственную скорость катера.

863. Две организации приобрели театральные билеты. Первая организация израсходовала на билеты 30 р., а вторая, купившая на 5 билетов меньше и заплатившая за каждый билет на 30 к. меньше первой организации, уплатила за билеты 18 р. Сколько театральных билетов купила каждая организация?

864. От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом с той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 17 км. Какова скорость плота, если известно, что скорость моторной лодки по течению больше скорости плота на 48 км/ч?

865. При уборке урожая с каждого из двух участков собрано по 210 ц пшеницы. Площадь первого участка была на 0,5 га меньше площади второго участка. Сколько центнеров пшеницы собрано с одного гектара на каждом участке, если урожай пшеницы на первом участке был на 1 ц с 1 га больше, чем на втором?

866. Расстояние от дома до школы 700 м. Сколько шагов делает ученик, проходя путь от дома до школы, если его старший брат, шаг которого на 20 см длиннее, делает на 400 шагов меньше?

867. Найти четыре числа, являющиеся последовательными членами геометрической прогрессии, если третье число больше первого на 9, а второе больше четвертого на 18.

868. Найти сумму первых двенадцати членов арифметической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна нулю, а сумма четырех первых равна 1.

869. Найти четыре числа, зная, что первые три из них являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а последние три — арифметической прогрессии. Сумма первого и четвертого чисел равна 16, а второго и третьего равна 12.

870. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый ее члены являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии. Найти первый член геометрической прогрессии.

871. Произведение пятого и шестого членов арифметической прогрессии в 33 раза больше произведения ее первого и второго членов. Во сколько раз пятый член прогрессии больше второго, если известно, что все члены прогрессии положительны?

872. В треугольнике, площадь которого равна 12 см^2, середины сторон соединены отрезками. Во вновь полученном треугольнике точно так же образован новый треугольник и т. д. Найти сумму площадей всех получающихся таким построением треугольников.

6. Функции и графики

873. График линейной функции $y=-\frac{5}{2}x+b$ проходит через точку $(-2;\ 3)$. Найти b.

874. График линейной функции $y=kx+3$ проходит через точку $(-1;\ 4)$. Найти k.

875. Найти коэффициенты k и b линейной функции $y=kx+b$, если ее график проходит через точки A и B:

1) $A(-1;\ -2)$, $B(3;\ 2)$;
2) $A(2;\ 1)$, $B(1;\ 2)$;
3) $A(4;\ 2)$, $B(-4;\ -3)$;
4) $A(-2;\ -2)$, $B(3;\ -2)$.

876. Через точку $A(-3;\ 2)$ проходит прямая, параллельная прямой, проходящей через точки $B(-2;\ 2)$ и $C(3;\ 0)$. Записать формулы, задающие линейные функции, графиками которых являются данные прямые.

877. Выяснить, принадлежит ли прямой $x+\frac{y}{2}=1$ точка A:

1) $A(-1; 4)$; 2) $A(0; 3)$; 3) $A(1; 0)$; 4) $A\left(\frac{3}{2}; -1\right)$.

878. Линейная функция задана формулой $y=-\frac{3}{4}x+2$. Найти:

1) точки A и B пересечения ее графика с осями координат;
2) длину отрезка AB;
3) расстояние от начала координат до прямой $y=-\frac{3}{4}x+2$.

879. Найти значения x, при которых график функции $y=3x-1$ расположен: 1) выше оси Ox; 2) ниже оси Ox.

880. Найти значения x, при которых значения функции $y=-2x+1$: 1) положительны; 2) отрицательны.

881. Найти значения x, при которых график функции $y=2x-1$ лежит ниже графика функции $y=3x-2$.

882. Найти значения x, при которых график функции $y=(\sqrt{3}-2)x-\sqrt{3}$ лежит выше графика функции $y=(1+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}$.

883. Доказать, что функция $y=2x-3$ возрастает.

884. Доказать, что функция $y=-\sqrt{3}x-3$ убывает.

885. Выяснить, пересекаются ли графики следующих функций:

1) $y=3x-2$ и $y=3x+1$;
2) $y=3x-2$ и $y=5x+1$;
3) $y=3x-2$ и $y=6x-4$.

886. Построить графики функций:

1) $y=2-|x|$; 2) $y=|2-x|$; 3) $y=|2-x|+|x-3|$.

Выяснить, пересекают ли графики каждой из данных функций прямую $y=3$. В случае утвердительного ответа найти координаты точек пересечения.

887. Дана функция $y=x^2-2x-3$.

1) Построить ее график и найти значения x, при которых $y(x)<0$.
2) Доказать, что эта функция возрастает на промежутке $[1; 4]$.
3) Найти значение x, при котором функция принимает наименьшее значение.
4) Найти значения x, при которых график функции $y=x^2-2x-3$ лежит выше графика функции $y=-2x+1$.
5) Записать уравнение касательной к параболе $y=x^2-2x-3$ в точке с абсциссой, равной 2.

888. Дана функция $y=-2x^2+3x+2$.
1) Построить ее график и найти значения x, при которых $y(x)<0$.
2) Доказать, что функция $y=-2x^2+3x+2$ убывает на промежутке $[1; 2]$.
3) Найти значение x, при котором функция принимает наибольшее значение.
4) Найти значения x, при которых график функции $y=-2x^2+3x+2$ лежит ниже графика функции $y=3x+2$.
5) Записать уравнение касательных к параболе $y=-2x^2+3x+2$ в точках с ординатой, равной 3.

889. Выяснить, пересекаются ли графики функций:

1) $y=x^2$ и $y=x+6$; 2) $y=\frac{3}{x}$ и $y=4(x+1)$;

3) $y=\frac{1}{8}x^2$ и $y=\frac{1}{x}$; 4) $y=2x-1$ и $y=\frac{1}{x}$.

890. Исследовать функцию на четность и нечетность:
1) $y=2x^2-1$; 2) $y=x-x^3$;

3) $y=x^5-\frac{1}{x}$; 4) $y=\frac{\sin x}{x}$.

891. Найти наименьший положительный период функции:

1) $y=\cos\frac{3x}{2}$;

2) $y=2\sin 0{,}6\,x$.

892. Исследовать функцию на четность и нечетность и построить ее график:
1) $y=-x^4+4x^2-5$;
2) $y=x^3-4x$.

893. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции $y=ax^2+bx-4$, если $y(1)=0$ и $y(4)=0$.

894. Найти точки пересечения графика квадратичной функции с осями координат:
1) $y=2x^2-5x+6$;
2) $y=2x^2-5x+2$;
3) $y=4x^2+12x+9$.

895. Построить график функции $y=ax^2+bx+c$, если $y(-2)=15$, $y(3)=0$, $y(0)=-3$.

896. Построить график функции $y=\sqrt{25-x^2}$. Указать по графику промежутки монотонности функции. Доказать, что график данной функции симметричен относительно оси Oy.

897. Построить график функции $y=\frac{5}{x-2}$. Доказать, что функция $y=\frac{5}{x-2}$ убывает на промежутках $x<2$ и $x>2$. В какой точке график функции $y=\frac{5}{x-2}$ пересекает ось ординат?

Найти область определения функции (**898—899**).

898. 1) $y=\lg(2-x)-\sqrt{x+2}$; 2) $y=\lg(x^2+2x-15)$;

3) $y=\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}$; 4) $y=\sqrt{\log_3\frac{2x+1}{x-6}}$.

899. 1) $y=\frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\log_2(x-1)}$; 2) $y=\lg(1-\lg(x^2-5x+6))$;

3) $y=\sqrt{\frac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}$; 4) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-1}$.

Найти множество значений функции (**900—901**).

900. 1) $y=x^2+6x+3$; 2) $y=-2x^2+8x-1$;

3) $y=e^x+1$; 4) $y=2+\frac{2}{x}$.

901. 1) $y=0{,}5+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y=\cos 2x-\frac{\pi}{4}$;

3) $y=2\sin x-3\cos x$; 4) $y=0{,}5\cos x+\sin x$.

902. Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y=x^3-x^2-7x+6$ в точке $M(2;-4)$.

903. Найти тангенс угла, который касательная к графику функции $y=x^2\cdot e^{-x}$ в точке с абсциссой $x=1$ образует с осью Ox.

904. Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y=\frac{2}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{3}$.

905. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x)=\frac{x^3+1}{3}$ в точке его пересечения с осью Ox.

906. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x)=\sqrt{x^3}+1$ в точке с абсциссой $x=4$.

907. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^2(2x-3)-12(3x-2)$ на отрезке $-3\leqslant x\leqslant 6$.

908. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2\ln^3 x-9\ln^2 x+12\ln x$ на отрезке $e^{\frac{3}{4}}\leqslant x\leqslant e^3$.

909. На параболе $y=x^2$ найти точку, расстояние от которой до точки $A\left(2;\frac{1}{2}\right)$ является наименьшим.

910. На координатной плоскости даны точки $A(3;-1)$ и $D(4;-1)$. Рассматриваются трапеции, у которых отрезок AD является одним из оснований, а вершины другого основания лежат на

дуге параболы $y=1-x^2$, заданной на отрезке $[-1; 1]$. Среди этих трапеций выбрана та, которая имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

911. На координатной плоскости дана точка $K(3; 6)$. Рассматриваются треугольники, у которых две вершины симметричны относительно оси Oy и лежат на дуге параболы $y=4x^2$, заданной на отрезке $[-1; 1]$, а точка K является серединой одной из сторон. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

912. Из всех цилиндров, у которых периметр осевого сечения равен p, выбран цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем.

913. Из всех цилиндров, которые можно поместить внутри сферы радиуса R, найти цилиндр наибольшего объема.

914. Консервная жестяная банка заданного объема должна иметь форму цилиндра. При каком соотношении между диаметром основания и высотой расход жести будет наименьшим?

915. Из всех правильных треугольных призм, которые вписаны в сферу радиуса R, выбрана призма наибольшего объема. Найти высоту этой призмы.

916. Из всех цилиндров, вписанных в конус с радиусом основания R и высотой H, найти цилиндр наибольшего объема.

917. Найти экстремумы функции:
1) $f(x)=x^3+3x^2-9x+4$; 2) $f(x)=x^4-2x^5+5$.

918. Исследовать с помощью производной функцию $y=x^3-3x+2$ и построить ее график. Найти точки, в которых касательные к графику параллельны оси Ox.

919. Исследовать с помощью производной функцию $y=x^3-5x^2-x+5$ и построить ее график. Записать уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой, равной 4.

920. Исследовать с помощью производной функцию и построить ее график:
1) $y=-\frac{x^4}{4}+x^2$; 2) $y=x^4-2x^2-3$.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (**921—923**).

921. 1) $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $x=9$; 2) $y=4x-x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$;
3) $y=4-x^2$, $y=2x^2-8$; 4) $y=x^2+3$, $y=x+5$;
5) $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$; 6) $y=2\sqrt{x}$, $6-y=0$, $x=0$.

922. 1) $y=9-x^2$, $y=(x-1)^2-4$; 2) $y=(x-2)^2$, $y=4-x$;
3) $y=x^{-2}$, $y=\frac{17}{4}-x^2$, $x>0$; 4) $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x}$.

923. 1) $y=\cos x$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=0$; 2) $y=\sin\frac{x}{2}$, $y=\sqrt{x}$, $x=\pi$;
3) $y=\cos x$, $y=x+1$, $y=0$;
4) $y=3^x$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$.

7. Комбинированные задания

924. 1) Решить уравнение $\sin 2x+\cos 2x+1=0$.

2) Решить неравенство $0{,}5^{x-1}\leqslant 2^{-0{,}5x}$.

3) Вычислить: $5\cdot 10^{2-\log_{100}25}$.

4) Для функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3$ найти первообразную, график которой проходит через точку $(1;\ -0{,}5)$. Вычислить значение первообразной в точке $x=2$.

5) При каком уменьшаемом разность будет наибольшей, если вычитаемое равно удвоенному квадрату уменьшаемого?

925. 1) Решить уравнение $\sin^2 x+0{,}5\sin 2x=1$.

2) Решить неравенство $0{,}6^{2x^2+8x}>1$.

3) Вычислить: $10^{0{,}5\log_4 10+1}$.

4) Для функции $f(x)=2\sqrt{x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку (4; 10). Вычислить значение первообразной при $x=\sqrt[3]{9}$.

5) При каком значении первого множителя произведение будет наименьшим, если второй множитель на 3 единицы меньше первого?

926. 1) Решить уравнение $\sin x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

2) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x+6)$.

3) Доказать, что функция $y=3x^2-12x+11$ при $x>2$ возрастает.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-3x^2-x-1,\ x=-1 \text{ и } y=-15.$$

5) Упростить выражение

$$\frac{a+\sqrt{ab}}{a+b}\left(a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}-\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\right).$$

927. 1) Решить уравнение $\sin x=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

2) Решить неравенство $\log_2 x+\log_2(2x-1)<\log_2(2x+2)$.

3) Доказать, что функция $y=-2x^2+4x-7$ при $x>1$ убывает.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2-4x+8,\ x=-1,\ x=4,\ y=3.$$

5) Упростить выражение

$$\left(\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2.$$

928. 1) Автомашина прошла 150 км по шоссе и 90 км по грунтовой дороге, по которой скорость ее движения стала меньше на 20 км/ч. С какой скоростью двигалась автомашина по грунтовой дороге, если время движения по шоссе и по грунтовой дороге одно и то же?

2) Упростить выражение $\frac{\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$.

3) Решить уравнение $\lg\sqrt{x-3}+\lg\sqrt{2x-3}+1=\lg 30$.

4) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=4-x^2,\ y=2x-x^2,\ x=0.$$

5) Найти значения x, при которых $f'(x)\geqslant 0$, если $f(x)=16\ln x-2x^2$.

929. 1) Моторная лодка прошла вниз по течению реки 91 км и после четырехчасовой остановки вернулась обратно, затратив на всю поездку сутки. Какова скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 10 км/ч?

2) Упростить выражение $\frac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}$.

3) Решить уравнение $8^x+18^x-2\cdot 27^x=0$.

4) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2-4,\ y=x^2-6x+8 \text{ и } x=0.$$

5) Найти значения x, при которых $f'(x)\leqslant 0$, если $f(x)=x^2-2\ln x$.

8. Задачи, предлагавшиеся на выпускных экзаменах

930. 1) Упростить выражение $0{,}5(\operatorname{tg}75^\circ-\operatorname{ctg}75^\circ)$.

2) Решить уравнение $\log_3 x=\frac{\log_3(2x+3)}{\log_3 9}$.

3) Решить неравенство $2\cdot 0{,}5^{2x-1}<0{,}25^{1-3x}$.

4) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2-2x+1$ и осями координат.

5) В правильной пирамиде $MABCD$ высота $MO=2$, $\angle MAO=45^\circ$. Найти высоту другой пирамиды, имеющей наибольший объем, если ее вершина находится в точке O, а основанием является сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью, параллельной основанию $ABCD$.

931. 1) Упростить выражение $\cos(-2\alpha)+\cos(1{,}5\pi+2\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

2) Решить уравнение $\frac{2}{\sqrt{3-x}}=\frac{\sqrt{x+5}}{x+3}$.

3) Решить неравенство и найти какие-нибудь два его решения: $\log_{0,5}(x-1)>-2$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=0{,}5x^2-2x+6$, касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0=3$ и прямой $x=1$.

5) Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат $ABCD$, ребро MA перпендикулярно плоскости основания, $MC = 5\sqrt{2}$, $0 < BC < 5\sqrt{2}$. Найти наибольшую площадь треугольника CMB.

932. 1) Решить уравнение $2\sin^2 x = 1 - (2 - \cos x)^2$.

2) Решить неравенство $\log_2 x + \log_2 (x-2) < 3$.

3) Фигура, ограниченная линиями $y = \frac{10}{x}$, $x = 1$, $x = 10$, $y = 0$, делится прямой $x = 3$ на две части. Определить, какая из полученных фигур имеет бóльшую площадь.

4) Решить уравнение $\sqrt{289 - x^2} = x^2 - 49$.

5) Основанием прямой призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник, а периметр большей ее боковой грани равен 24 см. Какие длины должны иметь стороны основания призмы, чтобы ее объем был наибольшим?

933. 1) Решить уравнение $3^{2x+1} + 3^{2x+2} = \frac{4}{9}$.

2) Доказать, что функция $y = \log_{0,5}(3 - 2x)$ возрастает на всей области определения.

3) Решить неравенство $\sin x > 0{,}5\sqrt{2}$. Указать одно решение, принадлежащее отрезку $[-\pi; \pi]$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{8}{x}$, $x = 4$, $y = x + 2$. Известно, что $\ln 2 \approx 0{,}69$.

5) Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а высота может принимать любые значения, принадлежащие отрезку $[1; 3]$. Найти наибольший объем пирамиды.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ВНЕКЛАССНОЙ РАБОТЫ

1. Разные задачи

934. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{25+10x+x^2}=8$;

2) $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=6$;

3) $\sqrt[3]{(8-x)^2}-\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=7$;

4) $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5$.

935. Доказать утверждение: если уравнение $x^n+a_1x^{n-1}+$ $+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ с целыми коэффициентами a_1, a_2, ..., a_n имеет рациональный корень $x_0\neq 0$, то этот корень является целым числом, причем $\frac{a_n}{x_0}$ также целое число и в результате деления «столбиком» левой части уравнения на $x-x_0$ получается многочлен $(n-1)$-й степени.
Используя это утверждение, решить уравнение:

1) $x^3-3x^2+x=3$; 2) $x^3-3x^2-4x+12=0$;

3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3=0$;

4) $x^4-3x^3-2x^2-6x-8=0$.

936. Решить уравнение:

1) $\sin x+\cos x=-1$; 2) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$;

3) $5\sin x+\cos x=5$; 4) $4\sin x+3\cos x=6$.

937. Пересекает ли график функции $y=x^3-6x^2+11x-6$ ось Ox в точках, абсциссы которых являются целыми числами?

938. Уравнение $2x^3+mx^2+nx+12=0$ имеет корни $x_1=1$, $x_2=-2$. Найти третий корень этого уравнения.

939. Решить систему уравнений и установить, при каких значениях параметров a и b она имеет решение:

1) $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=\frac{5}{2},\\ x+y=a+a^2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ \log_b x+\log_b y=2.\end{cases}$

940. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}x^y=y^x,\\ x^3=y^2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^{\sqrt{y}}=y,\\ y^{\sqrt{y}}=x^4;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x-y=\frac{5\pi}{3},\\ \sin x=2\sin y;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-y=-\frac{1}{3},\\ \cos^2\pi x-\sin^2\pi y=\frac{1}{2};\end{cases}$

5) $\begin{cases}\sqrt{2}\sin x=\sin y,\\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\cos x\cdot\sin y=\frac{1}{2},\\ \sin 2x+\sin 2y=0.\end{cases}$

941. Решить неравенство $\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^3+6x^2+5x-12}>0$.

942. Решить неравенство:

1) $\sqrt{2x-5}<\sqrt{5x+4}$; 2) $\sqrt{3x-2}>x-2$;
3) $\sqrt{5x+11}>x+3$; 4) $\sqrt{x+3}>x+1$;
5) $\sqrt{2x-7}\leqslant\sqrt{6x+13}$; 6) $\sqrt{3-x}<\sqrt{3x-5}$.

Построить график функции (**943—945**).

943. 1) $y=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$; 2) $y=\frac{2}{1-2x}$;
3) $y=\frac{3x+2}{2x-3}$; 4) $y=\frac{2x}{2-|x|}$.

944. 1) $y=\frac{2}{(x-1)(x-3)}$; 2) $y=\frac{1}{\cos x}$;
3) $y=\frac{1}{\ln x}$; 4) $y=\frac{3}{x(x+2)}$.

945. 1) $y=\log_2\sin x$; 2) $y=\sqrt{\cos x}$;
3) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$; 4) $y=\sin^2 x$.

946. Доказать тождество:

1) $\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_d c=\log_d a$;

2) $\log_{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}x=\frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1}x}+\frac{1}{\log_{a_2}x}+\ldots+\frac{1}{\log_{a_n}x}}$.

2. Задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы

Решить уравнение (**947—952**).

947. 1) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$;

2) $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$;

3) $\frac{2x+1}{x}-2\sqrt{\frac{2x+1}{x}}=3$;

4) $\frac{1}{2-\sqrt{4-x}}+\frac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4-x}}$.

948. 1) $9\cdot 4^{\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{\frac{1}{x}}=4\cdot 9^{\frac{1}{x}}$;

2) $\log_2(x^2-3)-\log_2(6x-10)+1=0$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2^2 x+1}=9^{2-\log_2 x^3}$;

4) $x-\log_3\sqrt{31-9x}=1-\log_3\sqrt{1+3^{2(1-x)}}$;

5) $2\log_2 x-2\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{\log_2 x}$;

6) $\log_x(2x^2-3x-4)=2$.

949. 1) $1+\log_x(5-x)=\log_7 4\cdot\log_x 7$;

2) $1+\log_x(4-x)=\log_5 3\cdot\log_x 5$;

3) $(\log_4(2x+9)+1)\log_{x+2}2=1$;

4) $(\log_9(7-x)+1)\log_{3-x}3=1$.

950. 1) $\cos 3x-\sin 6x+\sin 2x-\cos 7x=0$;

2) $\cos 3x-\sin 6x-\cos 7x-2\sin 2x=0,\ x\in[0;\pi]$;

3) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$;

4) $\cos^3 x-3\cos^2 x+\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $\sin^2 x+\cos^2 3x=1$; 6) $\operatorname{ctg} x+\sin 2x=\operatorname{ctg} 3x$.

951. 1) $\sqrt{5\sin x+\cos 2x}+2\cos x=0$;

2) $\sqrt{2-3\cos 2x}=\sqrt{\sin x}$;

3) $\sin x+\cos x=\sqrt{1+\operatorname{tg} x}$;

4) $\sqrt{5\sin 2x-2}=\sin x-\cos x$.

952. 1) $\frac{2\cos x}{\sin 3x+\sin x}-\frac{4}{3}=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\frac{2\sin x}{\cos x-\cos 3x}-\frac{1}{3}=4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

953. Найти все корни уравнения $\cos x+(1+\cos x)\operatorname{tg}^2 x-1=0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x>0$.

954. Найти все корни уравнения $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{25\pi}{6}$, удовлетворяющие неравенству $\lg(x-\sqrt{2x+24})>0$.

955. Найти наибольший на интервале $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ корень уравнения

$$\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)-2\sin x\cdot\cos 2x=0.$$

Решить систему уравнений (956—958).

956. 1) $\begin{cases} x-3y=-5, \\ \frac{x}{3y}-\frac{2y}{x}=-\frac{23}{6}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3}, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2+(y-4)^2=6, \\ 4x-xy=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y+z=6, \\ (x+z)(y+z)=15, \\ (y-1)(x+z)=4. \end{cases}$

957. 1) $\begin{cases} 6^x-2\cdot 3^y=2, \\ 6^x\cdot 3^y=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7\cdot 2^x+6y=2, \\ 3\cdot 2^{x+1}-5y=93; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2^{y+1}=3, \\ 4x+4^y=32; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 10(y-x)-x^4=9, \\ \sqrt{y}+\sqrt{y-2x}=\sqrt{2}. \end{cases}$

958. 1) $\begin{cases} xy=20, \\ x^{\lg y}=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^4+19=20(x+y), \\ \sqrt{x}+\sqrt{x+2y}=\sqrt{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 27\cdot 3^{2x-y}+3^{x^2}=4\sqrt{3}, \\ \lg(y-4x)=2\lg(2+2x-y)-\lg y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8\cdot 2^{-x-2y}+2^{y^2}=3\sqrt{2}, \\ \lg(x+4y)=2\lg(2-x-2y)-\lg x. \end{cases}$

Решить неравенство (959—961).

959. 1) $\frac{2x-3}{4-x}>\frac{1}{x}$; 2) $\frac{2x+5}{|x+1|}\geqslant 1$;

3) $\frac{x-4}{\sqrt{8+x}}<1$; 4) $\frac{x-3}{\sqrt{x-1}}<1$.

960. 1) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-5x+6}<1$;

2) $5^x-3^{x+1}>2(5^{x-1}-3^{x-2})$;

3) $\log_2\frac{x}{x-1}\leqslant -1$;

4) $\log_3((x+2)(x+4))+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7$.

961. 1) $\log_{\frac{1}{2}}(1+x-\sqrt{x^2-4})\leqslant 0$;

2) $\sqrt{2+\log_x 9}\cdot\log_{\frac{1}{3}}x<2$;

3) $\log_{\frac{1}{3}-2x}(1-16x^2)>0$;

4) $\frac{1}{\log_5(3-2x)}-\frac{1}{4-\log_5(3-2x)}<0$.

962. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 5$ на отрезке $[-2; 1]$.

963. Найти наибольшее значение функции $y = 3\sqrt{3} \sin x \cdot \sin 2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

964. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 24x - \cos 12x - 3 \sin 8x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$.

965. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2}$.

966. Найти координаты точки пересечения касательных к графику функции $y = \cos \pi x$, проведенных в точках с абсциссами $x = \frac{1}{6}$ и $x = \frac{7}{6}$.

967. Написать уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{x^3 + 1}{x}$, которые вместе с осями координат ограничивают треугольник площади $1/2$.

968. В какой точке графика функции $y = (x-1)^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, нужно провести касательную к графику, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, была наименьшей?

969. На параболе $y = 2x^2 - 3x + 8$ найти точки, касательные в которых проходят через начало координат.

970. При каком значении k площадь фигуры, заключенной между параболой $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$, наименьшая?

971. Парабола $y = x^2 + px + q$ пересекает прямую $y = 2x - 3$ в точке с абсциссой 1. При каких значениях p и q расстояние от вершины параболы до оси Ox является наименьшим? Найти это расстояние.

972. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и касательными к ней, проходящими через точку $M\left(\frac{5}{2}; 6\right)$.

973. Найти все значения x, при которых функция $y = 6 \cos^2 x + 6 \sin x - 2$ принимает наибольшее значение.

974. Найти все значения a, при которых наименьшее значение функции $y = x^2 + (a+4)x + 2a + 3$ на отрезке $[0; 2]$ равно -4.

975. Найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение квадратичной функции $y = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$ на отрезке $[0; 2]$ равно 3.

976. Найти все значения параметра a, при которых вершины двух парабол $y = 4x^2 + 8ax - a$ и $y = 4ax^2 - 8x + a - 2$ лежат по одну сторону от прямой $y = -5$.

977. Найти расстояние между ближайшими точками графиков функций $y = -3x^2 + 8x - 9$ и $y = x^2 + 8x + 13$.

978. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если сумма и произведение первых трех ее членов соответственно равны 63 и 1728.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

Арксинус, арккосинус и арктангенс числа.

Арксинус числа a, $-1 \leqslant a \leqslant 1$ (обозначается $\arcsin a$), — такое число α, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, синус которого равен a; $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Например, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

Арккосинус числа a, $-1 \leqslant a \leqslant 1$ (обозначается $\arccos a$), — такое число α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, косинус которого равен a; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Например, $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$.

Арктангенс числа a, $a \in \boldsymbol{R}$ (обозначается $\operatorname{arctg} a$), — такое число α, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен a; $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Например, $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений:

$$\sin x = a,\ |a| \leqslant 1;\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$
$$\cos x = a,\ |a| \leqslant 1;\ x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$
$$\operatorname{tg} x = a,\ a \in \boldsymbol{R};\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Дифференциальное уравнение — уравнение, которое содержит производную неизвестной функции. Например,

$$y' = ky,\ y'' + \omega^2 y = 0.$$

Решение дифференциального уравнения определяется неоднозначно. Например, решениями дифференциального уравнения $y' - 2x = 0$ являются функции $y = x^2 + C$, где C — произвольная постоянная.

Для единственности решения задаются дополнительные условия. Например, для единственности решения дифференциального уравнения гармонических колебаний $y'' + \omega^2 y = 0$ достаточно задать амплитуду A и начальную фазу φ колебаний, тогда уравнение гармонических колебаний $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ определится однозначно.

Интеграл от функции $y=f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$) — предел интегральных сумм $f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+\ldots+f(c_n)\Delta x_n$ при условии, что длина наибольшего из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ стремится к нулю. Здесь $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $c_k\in[x_{k-1}; x_k]$.

Формула Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; b]$, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, принимающей положительные значения, равна

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Логарифм положительного числа x по основанию a, $a>0$, $a\neq1$ (обозначается $\log_a x$) — показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить x, т. е. $a^{\log_a x}=x$.

Например, $\log_3 27=3$, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=2$, $\log_3\frac{1}{9}=-2$, $3^{\log_3 4}=4$.

Логарифмирование — действие нахождения логарифма числа.

Свойства логарифмов ($a>0$, $a\neq1$, $x>0$, $x_1>0$, $x_2>0$, $p\in\boldsymbol{R}$):

1. $\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$.
2. $\log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2$.
3. $\log_a x^p=p\log_a x$.
4. Если $\log_a x_1=\log_a x_2$, $a>0$, $a\neq1$, то $x_1=x_2$.

Десятичный логарифм числа — логарифм этого числа по основанию 10, обозначается $\lg a$.

Натуральный логарифм числа — логарифм этого числа по основанию e, обозначается $\ln a$.

Число e — иррациональное число, $e\approx2{,}718$.

Формула перехода от одного основания логарифма к другому:

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Например, $\log_3 5=\frac{\lg 5}{\lg 3}$; $\log_5 6=\frac{\ln 6}{\ln 5}$.

Логарифмическая функция — функция

$$y=\log_a x, \text{ где } a>0,\ a\neq 1.$$

Свойства логарифмической функции:

1. Область определения — множество всех положительных чисел.

2. Множество значений — множество R всех действительных чисел.

3. Возрастающая, если $a>1$; убывающая, если $0<a<1$.

4. Принимает положительные значения при $x>1$, отрицательные — при $0<x<1$, если $a>1$; положительные — при $0<x<1$, отрицательные при $x>1$, если $0<a<1$.

Нечетная функция — функция $f(x)$, обладающая свойством

$$f(-x)=-f(x)$$

для каждого x из области ее определения.

Например, $f(x)=x^3$, $f(x)=\sin x$ — нечетные функции.

Обратная функция к функции $y=f(x)$ — функция $y=g(x)$, которая получается при решении уравнения $f(x)=y$ относительно x и заменой x на y и y на x.

Например, $y=2x-1$ обратная к функции $y=\frac{x+1}{2}$; логарифмическая функция $y=\log_a x$ является обратной к показательной функции $y=a^x$. Графики взаимно обратных функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$.

Первообразная функции $f(x)$ на промежутке — такая функция $F(x)$, что $F'(x)=f(x)$ на этом промежутке.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то все первообразные можно записать в виде $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная.

Правила нахождения первообразных:

Если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то:

1) $F(x)+G(x)$ — первообразная функции $f(x)+g(x)$;

2) $aF(x)$ — первообразная функции $af(x)$.

Первообразные некоторых функций:

Функции	Первообразные
$x^p,\ p\neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$
$\frac{1}{x},\ x>0$	$\ln x+C$
e^x	e^x+C
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$

Периодическая функция — функция $f(x)$, обладающая свойством

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T)$$

для каждого x из области ее определения и для некоторого $T\neq 0$. Число T называют *периодом* этой функции.

Например, $f(x)=\sin x$ — периодическая функция с наименьшим положительным периодом, равным 2π.

Показательная функция — функция

$$y=a^x, \text{ где } a>0,\ a\neq 1.$$

Свойства показательной функции:

1. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
2. Множество значений — множество всех положительных чисел.
3. Возрастающая, если $a>1$; убывающая, если $0<a<1$.

Производная функции $f(x)$ в точке x — предел разностного отношения

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Дифференцирование — операция нахождения производной.

Правила дифференцирования:

1. $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$.
2. $(cf(x))'=cf'(x)$.
3. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Производные некоторых функций:

1. $(x^p)'=px^{p-1}$.

Например, $(c)'=0$, где c — постоянная; $(x)'=1$; $(x^2)'=2x$; $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, где $x>0$; $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, где $x\neq 0$.

2. $(e^x)'=e^x$.
3. $(a^x)'=a^x\ln a$.
4. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $x>0$.
5. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, $x>0$, $a>0$, $a\neq 1$.
6. $(\sin x)'=\cos x$.
7. $(\cos x)'=-\sin x$.

Геометрический смысл производной: $f'(x)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x; f(x))$.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Равносильные уравнения — уравнения, имеющие одно и то же множество корней.

Например, уравнения $x^2-5x+6=0$ и $(x-2)(x-3)=0$ равносильны; уравнения $\log_2 x=3$ и $2x-16=0$ равносильны.

Уравнение называется *следствием данного уравнения*, если множество его корней содержит все корни данного уравнения.

Например, уравнение $x^2+x-6=0$ является следствием уравнения $\sqrt{6-x}=x$.

Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Тригонометрические формулы.

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

Зависимость между тангенсом, котангенсом, синусом и косинусом:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Формулы сложения:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Формулы преобразования суммы и разности синусов и косинусов в произведение:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Формулы приведения получают по следующим правилам:

1. В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2. Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс — на котангенс и наоборот. Если угол равен $\pi\pm\alpha$, то замены не происходит.

Например, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha$, $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

Тригонометрические функции — функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$.

Свойства тригонометрических функций

Функция $y=\sin x$

1. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
2. Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.
3. Периодическая, наименьший положительный период равен 2π, т. е. $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
4. Нечетная: $\sin(-x)=-\sin x$.
5. Наибольшее значение, равное 1, принимает при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; наименьшее значение, равное -1, принимает при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; значение, равное нулю, принимает при $x=\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; положительные значения — на интервалах $(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; отрицательные значения — на интервалах $(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
6. Возрастающая на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$; убывающая на промежутках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Функция $y=\cos x$

1. Область определения — множество R всех действительных чисел.

2. Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.

3. Периодическая, наименьший положительный период равен 2π.

4. Четная.

5. Наибольшее значение, равное 1, принимает при $x=2\pi n$, $n\in Z$; наименьшее значение, равное -1, принимает при $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$; значение, равное нулю, принимает при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; положительные значения — на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; отрицательные значения — на интервалах $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

6. Возрастающая на промежутках $[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$, $n\in Z$; убывающая на промежутках $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$, $n\in Z$.

Функция $y=\operatorname{tg} x$

1. Область определения — множество всех действительных чисел, кроме $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

2. Множество значений — множество R всех действительных чисел.

3. Периодическая, наименьший положительный период равен π.

4. Нечетная.

5. Значение, равное нулю, принимает при $x=\pi n$, $n\in Z$; положительные значения — на интервалах $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$; отрицательные значения — на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right)$, $n\in Z$.

6. Возрастающая на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

Четная функция — функция $f(x)$, обладающая свойством

$$f(-x)=f(x)$$

для каждого x из области ее определения.

Например, $f(x)=x^2$, $f(x)=\cos x$ — четные функции.

Экстремум функции.

Возрастание и убывание функции. Если $f'(x)>0$ на промежутке, то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке. Если $f'(x)<0$ на промежутке, то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Точка максимума функции $f(x)$ — точка x_0, такая, что для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Точка минимума функции $f(x)$ — точка x_0, такая, что для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Точка экстремума функции — точка максимума или минимума.

Стационарная точка функции — точка, в которой производная функции равна нулю.

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0)=0$.

Достаточное условие экстремума. Если при переходе через стационарную точку x_0 производная функция меняет знак с «+» на «—», то x_0 — точка максимума этой функции, если производная меняет знак с «—» на «+», то x_0 — точка минимума.

Для нахождения *наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке* нужно найти значения этой функции в точках экстремума и в концах отрезка, а затем выбрать из них наибольшее и наименьшее.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

X КЛАСС

5. 2) $x=-1$; 4) $x=-2$. **11.** 88,4 г; 22,1 г. **12.** $4{,}87\cdot10^5$ м^3. **13.** 2) $x=\frac{2}{3}$; 4) $x=-\frac{2}{3}$

14. 2) $x=-0{,}5$; 4) $x=4$. **15.** 2) $x=2{,}5$; 4) $x=9$; 6) $x=0{,}4$. **16.** 2) $x=1$; 4) $x=3$. **17.** 2) $x=0$; 4) $x=0$. **18.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x=1$. **19.** 2) $x<2$; 4) $x<-0{,}5$; 6) $x\geqslant3$.

20. 2) $(0;-2)$; $(-1;-3)$. **21.** 2) $x_1=2$, $x_2=5$; 4) $x=-\frac{1}{3}$. **22.** 2) $x_1=1$, $x_2=-3$; 4) $x_1=0{,}5$, $x_2=-3$. **23.** 2) $x=0{,}8$; 4) $x=-1$; 6) $x_1=0{,}5$, $x_2=-3$. **24.** 2) $x_1=0{,}3$, $x_2=-0{,}2$; 4) $x=4$. **25.** 2) $y=3$; 4) $x=2$. **26.** 2) $x=3$; 4) $x=3$. **27.** 2) $x=-3$; 4) $x=4$. **28.** 2) $x=-1$; 4) $x_1=1$, $x_2=-1$; 6) $x=-1$. **29.** 2) $x>4$; 4) $x<1$, $x>2$; 6) $1<x<2$. **30.** 2) $x>1$; 4) $x\leqslant1$. **31.** 2) $x<2$; 4) $x<-1$.

35. 2) $(3;-2)$. **36.** $x=4$. **37.** 2) $x=2$; 4) $x=3$;25. **38.** 2) $-2<x<1$; 4) $-\frac{4}{3}<x<2$.

39. 2) $2^{\sqrt{3}}>2^{1{,}7}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}<\left(\frac{1}{9}\right)^{3{,}14}$. **40.** 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}<1$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}>1$.

42. 2) $0{,}04\leqslant y\leqslant5$. **43.** 2) $x=-2$; 4) $x_1=3$, $x_2=-1$. **44.** 2) $x=0$; 4) $x=2$. **45.** 2) $x=1$; 4) $x=3$. **46.** 2) $x<-1$; 4) $-2<x<2$. **49.** $a(1+0{,}01p)^{n-1}$. **51.** 2) $x=24$. **52.** 2) $x=9$; 4) $x=1$. **53.** 2) $x=0$; 4) $x=-0{,}5$. **54.** 2) $-3<x<1$; 4) $-1<x\leqslant1$.

55. 2) $(1;1)$. **57.** 2) $x=4$; 4) $x=1$. **58.** 2) $x<-3$, $x>1$; 4) $x<-1\frac{1}{3}$, $x>4$.

59. 2) 6; 4) 0; 6) -3. **60.** 2) 4; 4) 0; 6) -1. **61.** 2) -2; 4) 1; 6) $-\frac{1}{3}$. **62.** 2) 3; 4) -3. **63.** 2) -3; 4) -2. **64.** 2) 16; 4) 6. **65.** 2) 64; 4) 3. **66.** 2) 144; 4) 1. **67.** 2) $x=625$; 4) $x=25$; 6) $x=5{,}5$. **68.** 1) $-1{,}5$; 4) $-1\frac{2}{3}$. **69.** 2) $\frac{1}{4}$; 4) 5^{12}; 6) $1\frac{2}{7}$. **70.** 2) 1; 4) $\frac{1}{6}$; 6) 2. **71.** 2) $x>12$; 4) $x>0{,}5$. **72.** 2) $x<-3$; $x>2$; 4) x — любое действительное число; 6) $-\frac{5}{3}<x<4$. **73.** 2) $x=\log_{1,2}4$; 4) $x=\frac{1}{2}(1-\log_7 2)$. **74.** 2) $x=\log_3 4$; 4) $x_1=-1$, $x_2=\log_{\frac{1}{3}}2$. **75.** 2) 3; 4) 2. **76.** 2) 2; 4) -3. **77.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $-1\frac{1}{6}$.

78. 2) 1,5; 4) -4. **79.** 2) 1,5; 4) -3. **80.** 2) $1\frac{1}{3}$; 4) 0. **81.** 2) $x=\frac{a^2}{b^3}$. **82.** 1) 3; 2) 19.

83. 2) 1. **84.** 2) 0,845; 4) $-0{,}176$. **85.** 2) 0,693; 4) $-0{,}154$. **86.** 2) 1,29; 4) $-0{,}42$. **87.** 2) 1,3; 4) $-15{,}42$. **88.** 2) $x=8$; 4) $x=3$; 6) $x=2$. **89.** 2) $x_1=9$, $x_2=27$; 4) $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=\sqrt{2}$. **90.** 2) 1; 4) 0,5. **91.** 9 лет. **92.** 3052 качания. **93.** 2) 2,7182788; 4) 2,7182819. **94.** 2) $\log_{\frac{1}{3}}9>\log_{\frac{1}{3}}17$; 4) $\log_2\frac{\sqrt{5}}{2}>\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}$. **95.** 2) $\log_3 0{,}45<0$;

4) $\log_{0,5} 9,6 < 0$. **96.** 2) $x<1$; 4) $x>1$. **101.** 2) $x \geqslant \frac{1}{8}$; 4) $x>0,5$. **102.** 2) $0<x<0,16$; 4) $x \geqslant 0,16$. **103.** 2) $x=8$; 4) $x=46$; 6) $x=-1,6$. **108.** 2) $y=\frac{4-x}{5}$; 4) $y=\frac{2x+1}{3}$; 6) $y=\sqrt[3]{x+3}$; 8) $y=(0,5)^x$. **111.** 2) Второе; 4) каждое из двух — следствие другого. **112.** 2) $x=3$; 4) $x=\sqrt{2}$. **113.** 2) Корней нет; 4) $x=2$. **114.** 2) $x=5$. **115.** 2) Корней нет. **116.** 2) $x=1$; 4) $x_1=3$, $x_2=5$. **117.** 2) (1; 9). **118.** 2) $x_{1,2}=\pm 8$; 4) $x=16$; 6) $x=3$. **119.** 2) $x=3$; 4) $x_1=4$, $x_2=-8$. **120.** 2) $x=9$; 4) $x_1=100$, $x_2=1000$. **121.** 2) Да; 4) нет. **122.** 2) Да; 4) да. **123.** 2) $\left(8; \frac{1}{4}\right)$. **124.** 2) $x_1=4$, $x_2=\sqrt{2}$; 4) $x_1=3$, $x_2=9$; 4) $x_1=27$, $x_2=\frac{1}{9}$. **125.** 2) $x=\frac{2}{7}$. **126.** 2) $x=-4$. **127.** 2) $x<\frac{7}{5}$; 4) $-2<x<2$. **128.** 2) $x \leqslant -30$; 4) $1<x \leqslant 10$; 6) $x<-0,05$. **129.** 2) $x>25$; 4) $\frac{5}{3}<x<3$. **130.** 2) $2<x \leqslant 3$, $11 \leqslant x<12$. **131.** 2) $-\frac{2}{3}<x<1$. **132.** 2) $x>7$; 4) решений нет. **133.** 2) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 4$; 4) $x<-0,5$, $x>3$. **134.** 2) $x<2$, $x>3$; 4) $-2 \leqslant x<-1$, $6<x \leqslant 7$. **135.** 2) $x>2$. **136.** 2) $0<x<0,1$, $x>10\,000$. **137.** 2) $\log_3 \frac{1}{2}<x<\log_3 \frac{2}{3}$, $x>\log_3 2$; 4) $x<\frac{\sqrt{6}-1}{2}$, $\frac{6}{5}<x<\frac{\sqrt{6}}{2}$. **138.** 2) 4; 4) -3. **139.** 2) -4; 4) 6. **140.** 2) 1; 4) $\frac{2}{3}$. **141.** 2) $\frac{1}{4}$; 4) 4. **142.** 2) $-2,2$. **143.** 2) 2,26; 4) $-1,73$. **145.** 2) Возрастающая; 4) убывающая. **147.** 2) $x<0$, $x>2$. **148.** 2) $x=-\frac{3}{8}$; 4) $x=2$. **149.** 2) $x_1=1$, $x_2=-\frac{3}{2}$; 4) $x_1=4$, $x_2=8$. **150.** 2) $x=-4$; 4) $x=2$. **151.** 2) $x<10$; 4) $x<-1$. **152.** 2) Решений нет. **153.** 2) $x<-8$, $x>1$. **154.** 2) $-4,5$; 4) 36; 6) 2. **155.** 2) $0<x<1$. **157.** 2) $x=\frac{1}{3}\log_2 3$; 4) $x=\frac{1}{4}(\log_{\frac{1}{3}} 1,5-5)$; 6) $x=\log_5 3$. **158.** 2) $x=27$; 4) $x_1=27$, $x_2=\frac{1}{27}$. **159.** 2) $x=-4$; 4) $x_1=14$, $x_2=6$. **160.** 2) Корней нет. **161.** 2) $x=4,5$. **162.** 2) $x_1=2$, $x_2=5$; 4) корней нет. **163.** 2) $5<x \leqslant 6$; 4) $x>4$; 6) $-4<x<-3$. **165.** 2; 10; 50 или 50; 10; 2. **167.** 2) $x_1=-10$, $x_2=0,1$. **168.** 2) $x_1=23$, $x_2=-1,8$. **169.** 2) $x=2-\sqrt{2}$. **170.** 2) $x \leqslant 0$, $\log_6 5 \leqslant x<1$. **171.** $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; 4π. **172.** 90°; 30°; 150°; 630°; 540°; 495°. **174.** 2) $-\frac{4}{5}$; 4) $\frac{12}{5}$. **175.** $\frac{56}{65}$. **177.** 2) 0; 4) 0. **178.** 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) -1; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **179.** 2) $\frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$. **180.** 2) $2\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha$; 6) 0,5. **182.** $-\frac{8}{17}$. **183.** $\frac{40}{41}$. **185** 2) 0; 3) -1. Указание: записать данное выражение в виде $-4\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = -\frac{4\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}$, далее воспользоваться формулой синуса двойного угла; 4) $\frac{1}{8}$. Указание: записать данное выражение в виде $\frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$, далее воспользоваться формулой синуса двойного угла.

186. 2) -1. 187. 2) $\sqrt{3}$. 188. 2) $-\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$. 191. 2) $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$, $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$. 193. 2) 1. 194. 2) $\sqrt{2}\sin\beta$; 4) $\sin 2\alpha$. 195. 2) 0; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 196. 2) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 198. 2) $2\sin\alpha$. 201. 2) $2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}$. 202. 2) 0. 203. 2) $2\cos\alpha(\cos\alpha-1)$. 4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)\times$ $\times\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$. 204. 2) 0; 4) $\frac{\pi}{3}$; 6) $\frac{3\pi}{4}$. 205. 2) 2π; 4) 8π. 206. 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)<$ $<\arccos(-1)$. 207. 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. 208. 2) $x=$ $=\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pm\arccos(-0{,}2)+2\pi n$, $n\in Z$. 209. 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{2}+6\pi n$, $n\in Z$; 6) $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 210. 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 211. 2) Да; 4) нет; 6) да. 212. 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n\in Z$. 213. 2) $x=2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi n$, $n\in Z$. 214. 2) $x=$ $=-2{,}5$. 215. 2) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{3}$. 216. 2) 6; 4) $2\pi-4$. 217. 2) $x\approx\pm1{,}84+2\pi n$, $n\in Z$. 218. 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 6) $-\frac{\pi}{3}$. 219. 2) 0; 4) $-\frac{\pi}{2}$. 220. 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)>$ $>\arcsin(-1)$. 221. 2) $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. 222. 2) $x=$ $=(-1)^n\arcsin\frac{2}{7}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}+\pi n$, $n\in Z$. 223. 2) $x=-\frac{\pi}{4}+$ $+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=(-1)^n\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 6) $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 224. 2) $x=\pi n$, $n\in Z$. 225. 2) Да, 4) нет; 6) нет. 226. 2) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 4) $x=$ $=(-1)^n\frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{3\pi n}{2}$, $n\in Z$. 228. 2) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{3}{4}+$ $+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=(-1)^n\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$. 229. 2) $x=\frac{6+\sqrt{2}}{4}$. 230. 2) $-\frac{1}{5}$; 4) $-\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{3}$. 231. 2) 2; 4) $5-2\pi$. 232. 2) $x\approx(-1)^{n+1}\cdot0{,}32+\pi n$, $n\in Z$. 233. 2) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$. 234. 2) 0; 4) $-\frac{47\pi}{12}$. 235. 2) $\operatorname{arctg}(-5)<\operatorname{arctg}0$. 236. 2) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 6) $x=-\operatorname{arctg}5+\pi n$, $n\in Z$. 237. 2) $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$. 238. 2) $x=$ $=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\operatorname{arctg}4{,}5+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 239. 2) $\frac{3+\sqrt{3}}{5}$. 240. 2) $-0{,}3$; 4) -6. 241. 2) 2; 4) $13-4\pi$.

242. 2) $x \approx -1{,}44 + \pi n,\ n \in Z$. 243. 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; 4) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} +$ $+ \pi n,\ n \in Z$; 6) корней нет. 244. 2) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{3} + \pi n,\ n \in Z$; 4) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. 245. 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; 4) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \operatorname{arctg} 4 +$ $+ \pi n,\ n \in Z$; 6) корней нет. 246. 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in Z$; 4) $x =$ $= \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$. 247. 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; 4) $x =$ $= -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$. 248. 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = 2\pi n,\ n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$. 249. 2) $x = \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. 250. 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$. 251. 2) $x =$ $= -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ x = \pm\pi + 8\pi n,\ n \in Z$; 4) $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$. 252. 2) $x =$ $= -\frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$. 253. 2) $x =$ $= -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$. 254. 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $x = 2\pi n,\ n \in Z$; 4) $x = \pi + 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. 255. 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $x = 2\pi n,\ n \in Z$. 256. 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. 257. 2) Корней нет; 4) $x = \pi n,\ n \in Z$. 258. 2) $x = \pi n$; 4) $x = \frac{\pi n}{5},\ n \in Z$. 259. 2) $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$; 4) корней нет. 260. 2) $x = \pi n,\ x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. 261. 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \pi n,\ n \in Z$. 262. 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. 263. 2) $x =$ $= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. 264. 2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; 4) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} +$ $+ 2\pi n,\ n \in Z$. 265. 2) Решений нет; 4) $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$. 266. 2) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant$ $\leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. 267. 2) Решений нет; 4) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. 268. 2) $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z$; 4) $2\pi n \leqslant x \leqslant$ $\leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. 269. 2) $12 - 3\pi + 8\pi n < x < 12 - \pi + 8\pi n,\ n \in Z$. 270. 2) $-\frac{\pi}{2} +$ $+ 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. 271. 2) $2 \sin \alpha$. 272. 2) $-\operatorname{ctg} \alpha$. 274. 2) $\frac{1}{4}$. 275. 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 278. 2) $-\frac{7\pi}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$; 6) 0. 279. 2) $x = -2 \pm \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{9} \pm \frac{\pi}{18} +$ $+ \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z$. 280. 2) $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z$; 4) $x = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{5} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

281. 2) $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 282. 2) $x=\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{3\pi}{28}+\pi n$, $n\in Z$. 283. 2) $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 284. 2) $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{39}-3}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 285. 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}1{,}5+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 286. 2) $x=-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{5}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$. 287. 2) Корней нет. 288. 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi n}{5}$, $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$. 289. 2) $-\frac{5\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. 290. $4\sin 2\alpha$. 293. 2) $2\sin\alpha$. 294. 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) 1. 295. 2) 0; 4) -1; 6) 0. 296. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 297. 2) $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $x=-\operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in Z$. 298. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 299. 2) $x=\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. 300. 2) $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 301. 2) $x=\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{22}+\frac{2\pi n}{11}$, $n\in Z$. 302. 2) $x=\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. 303. 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in Z$. 304. $\frac{m^2-1}{2}$. 307. 2) $-\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 6) $-\frac{1}{5}$. 308. 2) $\frac{5}{4}$; 4) 2. 309. 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; 6) корней нет. 310. 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; 4) корней нет. 311. 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\times\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 312. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 313. 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. 314. $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$, $x=\pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 315. 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 316. 2) $x\in R$; 4) $x\neq 0$; 6) $x<-1$, $x\geqslant 1$. 317. 2) $0\leqslant y\leqslant 2$; 4) $-3\leqslant y\leqslant 5$; 6) $-1{,}25\leqslant y\leqslant -0{,}75$. 318. 2) $x\neq\pi n$, $n\in Z$; 4) $x\neq\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n\in Z$. 319. 2) $x=2\pi n$, $n\in Z$; 4) $-\frac{7\pi}{6}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; 6) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. 320. 2) $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 4) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 321. 2) $-1\leqslant y\leqslant 1$; 4) $1\leqslant y\leqslant 10$; 6) $-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$. 322. 5 и -5. 323. $-\sqrt{26}\leqslant y\leqslant\sqrt{26}$. 324. $1\leqslant y\leqslant 11$. 325. 2) Нечетная; 4) нечетная; 6) четная. 326. 2) Не является четной и не является нечетной; 4) четная; 6) четная. 329. 2) Четная; 4) нечетная; 6) четная. 330. 2) $\frac{4\pi}{3}$; 4) π. 331. 2) 2π. 335. 2) $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[-\pi;0]$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

336. 2) $\cos\frac{8\pi}{7}<\cos\frac{10\pi}{7}$; 4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)<\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$; 6) $\cos 4<\cos 5$.

337. 2) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$. **338.** 2) $0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{3}$;

3) $\frac{\pi}{6}<x<\frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}<x\leqslant 3\pi$. **339.** 2) $\sin\frac{\pi}{7}<\cos\frac{\pi}{7}$; 4) $\sin\frac{3\pi}{5}>\cos\frac{3\pi}{5}$;

6) $\cos\frac{\pi}{8}>\sin\frac{3\pi}{10}$. **340.** 2) $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{23\pi}{12}$; $\frac{25\pi}{12}$. **341.** 2) $-\frac{\pi}{12}<x<$

$<\frac{\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}<x<\frac{13\pi}{12}$, $\frac{23\pi}{12}<x<\frac{25\pi}{12}$. **343.** 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}<y<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

347. 2) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$; 4) $\left[-2\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{3\pi}{2};-\pi\right]$. **348.** 2) $\sin\frac{13\pi}{7}>$

$>\sin\frac{11\pi}{7}$; 4) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)>\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 6) $\sin 7>\sin 6$. **349.** 2) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$;

$\frac{11\pi}{4}$; 4) $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$. **350.** 2) $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}\leqslant x\leqslant 3\pi$; 4) $\frac{4\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$.

351. 2) $\sin\frac{9\pi}{8}>\cos\frac{9\pi}{8}$; 4) $\sin\frac{\pi}{8}<\cos\frac{3\pi}{10}$. **352.** 2) $-\frac{11\pi}{9}$; $-\frac{10\pi}{9}$; $-\frac{5\pi}{9}$;

$\frac{4\pi}{9}$; $\frac{\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{9}$; $\frac{7\pi}{9}$; $\frac{8\pi}{9}$. **353.** 2) $-\frac{3\pi}{2}\leqslant x<-\frac{11\pi}{9}$, $-\frac{10\pi}{9}<x<-\frac{5\pi}{9}$,

$-\frac{4\pi}{9}<x<\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}<x<\frac{7\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}<x\leqslant\pi$. **355.** 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

360. 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}<\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)<\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 6) $\operatorname{tg} 1<\operatorname{tg} 1{,}5$.

361. 2) $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$. **362.** 2) $-\pi\leqslant x<-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{6}$,

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}<x\leqslant 2\pi$; 4) $-\pi\leqslant x<-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}<x<\frac{3\pi}{2}$,

$\frac{5\pi}{3}<x\leqslant 2\pi$. **363.** 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$,

$n\in Z$. **364.** 2) $-\operatorname{arctg} 2+\pi$, $-\operatorname{arctg} 2+2\pi$, $-\operatorname{arctg} 2+3\pi$. **365.** 2) $-\frac{\pi}{2}+$

$+\pi n<x\leqslant\operatorname{arctg} 5+\pi n$, $n\in Z$; 4) $-\operatorname{arctg} 5+\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **366.** 2) $0\leqslant x<$

$<\operatorname{arctg} 4$, $\frac{\pi}{2}<x<\operatorname{arctg} 4+\pi$, $\frac{3\pi}{2}<x<\operatorname{arctg} 4+2\pi$, $\frac{5\pi}{2}<x\leqslant 3\pi$; 4) $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$,

$-\operatorname{arctg} 3+\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3+2\pi<x<\frac{5\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3+3\pi<x\leqslant 3\pi$.

367. 2) $-\frac{5\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$. **368.** 2) $-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{4\pi}{9}$, $-\frac{\pi}{6}<x<-\frac{\pi}{9}$,

$\frac{\pi}{9}<x<\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{6}<x<\pi$. **370.** 2) $y>1$; 4) $y\in R$. **372.** 2) $-\frac{\pi}{2}+$

$+\pi n<x<-\operatorname{arctg} 3+\pi n$, $\operatorname{arctg} 3+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n$,

$n\in Z$. **373.** 2) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; 6) $x\neq\pi n$,

$x\neq(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **374.** 2) $-1\leqslant y\leqslant 1$; 4) $5\leqslant y\leqslant 7$; 6) $-4\leqslant y\leqslant -2$. **375.** 2) Не-

четная; 4) не является четной и не является нечетной. **376.** 2) 14π. **377.** 2) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; 4) π; 3π. **378.** 2) $-\frac{11\pi}{6}<x<-\frac{7\pi}{6}$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-2\pi\leqslant x<\frac{3\pi}{2}$. **380.** 2) $\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **381.** 2) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$; 4) 1 и -2. **382.** 2) Четная; 4) нечетная. **383.** 2) 4π. **385.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{2\pi n}{3}$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. **386.** $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. **387.** $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. **389.** 2) $-1\leqslant y\leqslant\frac{5}{4}$. **390.** 2) $\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **392.** 2) $(0{,}2)^{\frac{2}{3}}>(0{,}2)^{\frac{3}{4}}$; 4) $\log_{0,3}\frac{4}{5}<\log_{0,3}\frac{3}{4}$. **393.** 2) $0<a<1$; 4) $0<a<1$; 6) $a>1$; 8) $a>1$. **394.** 2) $x=1$; 4) $x=-\frac{3}{8}$. **395.** 2) $x=9$; 4) $x=0$. **396.** 2) $x=1$; 4) $x=0$. **397.** 2) $x=3$. **398.** 2) $x\leqslant 3$; 4) $x<-\frac{1}{8}$. **399.** 2) $x\leqslant 1$; 4) $3-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{2}$. **400.** 2) 3; 4) -1; 6) -3. **401.** 2) 0; 4) $\frac{1}{9}$; 6) 1000. **402.** 2) $x=25$; 4) $x_1=3$, $x_2=243$. **403.** 2) $x=-3$; 4) корней нет. **404.** 2) $\frac{1}{3}<x<2$; 4) $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$. **405.** 2) $-1\leqslant x<1$, $3<x\leqslant 5$; 4) $1<x\leqslant 2$, $3\leqslant x<4$. **407.** 2) 4π; 4) $-\pi$. **408.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$; 4) $x=-\operatorname{arctg}2{,}5+\pi n$, $n\in Z$. **409.** 2) Корней нет; 4) корней нет. **410.** 2) $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{5}+\pi n$, $x=\pm\arccos\frac{3}{5}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=-\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in Z$. **411.** 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **412.** 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. **413.** 2) $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **414.** 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **415.** 2) 2; 4) $-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$; 6) 1. **416.** 2) $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$. **417.** 2) $x>-2$; 4) $x\neq 2\pi+4\pi n$, $n\in Z$. **419.** 2) Нечетная; 4) четная. **420.** 2) $x_1=1{,}5$, $x_2=-0{,}5$; 4) $x=-3$. **421.** 2) $x_1=-1$, $x_2=3$; 4) $x=0$. **422.** 2) $x_1=100$, $x_2=0{,}1$; 4) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{16}$; 6) $x=0$. **423.** 2) $x\in R$; 4) $x<3$; 6) $x\leqslant 1-\frac{1}{3}\log_3 5$. **424.** 2) $0<x<\frac{1}{3}$, $x>1$; 4) $0<x<1$, $x>1$. **425.** 2) $\frac{1}{\sqrt{10}}<x<10$. **426.** 2) (4; 1); 4) (10; 1000), (1000; 10). **427.** 2) (5; 2); 4) $(\sqrt{8};\sqrt[4]{8})$. **428.** 2) $3<\log_2 10<4$. **429.** 2) 0; 4) -1; 6) 0. **430.** 2) 1; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **431.** 2) -1; 4) 1; 6) -1. **432.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi n}{2}$, $n\in Z$. **433.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{11}+2\pi n$, $n\in Z$. **434.** 2) $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **435.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $x=\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $n\in Z$. **436.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=$

$\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in Z$. 437. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg} 3+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 438. 2) $x=\frac{\pi n}{8}$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. 439. 2) $-3\pi\leqslant x\leqslant-\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{9\pi}{4}\leqslant x\leqslant-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\pi$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-3\pi<x<-\frac{5\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-2\pi<x<-\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}<x<\frac{\pi}{2}$, 440. 2) Четная; 4) не является четной и не является нечетной. 441. 2) 10π; 4) 2π. 442. 2) 3 и -2. 445. 2) $2\cos\alpha$. 446. 2) $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}3\alpha$. 447. 2) $1+\frac{1}{\cos x}$. 448. 2) $1\frac{5}{7}$. 451. 1) $2\leqslant x\leqslant 3$; 2) $-\sqrt{10}\leqslant x<-3$; $3<x\leqslant\sqrt{10}$; 3) $x>1$; 4) $0<x<1$. 452. 2) $\frac{12}{13}$. 453. $C=\frac{\pi}{2}$. 454. 1) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 2) $x_1=4$, $x_2=-4$. 455. 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. 456. 2) $x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 457. 2) $(7^{(\log_5 3\log_7 2)^{\frac{1}{3}}};\ 5^{(\log_5 3\log_7 2)^{\frac{1}{3}}})$. 458. 2) $x>0{,}01$; 4) $x\in R$; 6) $2\pi n<x<\pi+2\pi n$, $n\in Z$.

XI КЛАСС

460. 2) $f'(x)=5$; 4) $f'(x)=-6x$. 461. 2) $f'(x)=4$; 4) $f'(x)=-5$. 462. 2) $v_{ср}=3$. 463. 2) $v(t)=-3$. 464. 2) $v(4)=0{,}25$, $v(8)=0{,}25$. 465. 2) $v(t)=10t$. 466. 2) $v(10)=20$. 467. 2) $7x^6$; 4) $13x^{12}$. 468. 2) $-3x^{-4}$; 4) $-7x^{-8}$. 469. 2) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; 4) $\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$. 470. 2) $-\frac{9}{x^{10}}$; 4) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; 6) $-\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$. 471. 2) $-15(5x+2)^{-4}$; 4) $-20(2-5x)^3$; 6) $2500x^3$. 472. 2) $-\frac{3}{4\sqrt[4]{(7-3x)^3}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{x^2}}$. 473. 2) $-\frac{2}{27}$; 4) $\frac{1}{12}$; 6) $-\frac{3}{16}$. 474. 2) $\frac{6}{(3-2x)^4}$; 4) $-\frac{4}{\sqrt[7]{(3-14x)^5}}$; 6) $\frac{4}{3(1-2x)\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$. 475. 2) $x=\frac{8}{27}$. 476. $\frac{1}{4}$. 477. 2) $8x+12$. 478. 2) $2x-1$; 4) $-34x$; 6) $1{,}5x^2$; 8) $16x$. 479. 2) $10x+6$; 4) $5x^4-6x$; 6) $-6x^2+18$; 8) $-9x^2+4x-1$. 480. 2) $3x^2-\frac{2}{x^3}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt[6]{x^5}}+\frac{1}{2\sqrt[14]{x^{13}}}$. 481. 2) $f'(0)=-2$, $f'(2)=10$; 4) $f'(0)=1$, $f'(2)=5$. 482. 2) $f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{9}$, $f'(1)=-\frac{1}{2}$; 4) $f'(3)=\frac{14\sqrt{3}}{9}$, $f'(1)=3$. 483. 2) $x=1{,}5$; 4) $x_1=1$, $x_2=-\frac{7}{3}$; 6) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-4$. 484. 2) $5x^4-4x^3+3x^2-2x$; 4) $\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$. 485. 2) 192; 4) 31,5. 486. $x_1=3$, $x_2=-0{,}4$, $x_3=1\frac{5}{11}$. 487. 2) $\frac{2\sqrt{x}(x^2-2x-1)-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$. 488. 2) 1; 4) $-\frac{5}{18}$. 489. 2) $2x+1-\frac{16}{x^2}$; 4) $1+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{6}{x\sqrt[3]{x}}$. 490. 2) $\frac{3x^2+4}{2x\sqrt{x}}$; 4) $\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.

491. 2) $(x-1)^3(x+1)^6(11x-3)$; 4) $\frac{4(2x-3)^2(10x+3)}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$. **492.** 2) $\frac{6x^2+6x+4}{(2x+1)^2}$; 4) $\frac{(x+2)(5x-x^2-4)}{2x\sqrt{x}(2-x)^2}$. **493.** 2) $-1<x<0$, $x>2$; 4) $x>1$. **494.** 2) $x\neq 1{,}5$; 4) $x>0{,}5$. **495.** 3,5 рад/с. **496.** 902,5 Дж. **497.** 2) 103 г/см.

498. $\frac{2x-5}{2\sqrt{(x-2)(x-3)}}$. Указание: записать данную формулу при $x>3$ в виде $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-3}$, а при $x<2$ в виде $\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{3-x}$. **499.** 2) e^x+2x; 4) $-3e^{-3x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

500. 2) $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-1}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$; 4) $-e^{1-x}-3x^{-4}$. **501.** 2) $3^x\ln x+2x^{-3}$; 4) $3e^{3x}+4x$.

502. 2) $3^x\ln 3-2e^{2x}$; 4) $-e^{3-x}-\frac{4}{x^5}$. **503.** 2) $\frac{3}{x}-2^x\ln 2$; 4) $-9x^{-4}-\frac{1}{x\ln 3}$.

504. 2) $-\sin x$; 4) $\cos x-2^x\ln 2$. **505.** 2) $-\sin(x+2)$; 4) $-\cos(3-x)$. **506.** 2) $\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}+3\right)+2^x\ln 2$; 4) $-12\sin 4x+\frac{1}{2x^2}$. **507.** 2) $\frac{3^x(\ln 3\cdot\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$;

4) $\frac{1}{x\ln 3}\cdot\sin 2x+2\log_3 x\cdot\cos 2x$. **508.** 2) 0; 4) $-\frac{1}{\ln 2}-3\ln 3$. **509.** 1) $x=\pm\frac{\pi}{3}+$ $+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=-0{,}5$; 6) $x=4$. **510.** 2) $x<0$, 4) $x>0$. **511.** 2) $-\frac{1}{2\sqrt{6-6x}}+$ $+\frac{10}{2-5x}$; 4) $-e^{\frac{2-x}{3}}-\frac{1}{2}\cos\frac{1+x}{4}$. **512.** 2) $\frac{\sqrt[3]{3}}{3(2-x)\sqrt[3]{2-x}}+\sin\frac{x-2}{3}$;

4) $-\frac{3}{2(x+2)\sqrt[4]{(x+2)^3}}-e^{\frac{x-4}{5}}$. **513.** 2) $\frac{5}{2\sqrt{x}}\cdot(1-2x)e^{-x}$;

4) $2e^{3-2x}(\sin(3-2x)-\cos(3-2x))$. **514.** 2) $\frac{\sqrt{3}(1+3^x)-2x\sqrt{3}3^x\ln 3}{2\sqrt{x}(3^x+1)^2}$;

4) $\frac{5^{2x}(2\ln 5\sin 3x+14\ln 5-3\cos 3x)}{(\sin 3x+7)^2}$. **515.** 2) $\frac{1}{x^2\ln 2}\left(x2^x\ln 2-\frac{1}{\ln 2}-2^x+\right.$ $\left.+\log_2 x\right)$; 4) $\sin x+\cos x$. **516.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in Z$. **517.** 2) 2. **518.** $2+2\pi$. **519.** 2) $f'(x)=0$ при $x=e^{-1}$, $f'(x)>0$ при $x>e^{-1}$, $f'(x)<0$ при $0<x<e^{-1}$;

4) $f'(x)=0$ при $x=1$, $f'(x)>0$ при $x>1$, $f'(x)<0$ при $0<x<1$. **520.** $\frac{2x-5}{x^2-5x+6}$. Указание: записать данную функцию при $x>3$ в виде $\ln(x-3)+\ln(x-2)$, а при $x<2$ в виде $\ln(3-x)+\ln(2-x)$. **521.** 2) $k=1$, $b=5$; 4) $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b=$ $=-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **522.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 3. **523.** 2) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$; 6) $\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$. **524.** 2) $y=$ $=-11x+12$; 4) $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$; 6) $y=x+1$; 8) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. **525.** 2) $y=1$; 4) $y=x$. **526.** 2) 0; 4) $\frac{\pi}{4}$. **527.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2}$. **528.** 2) $y=0$; 4) $y=2x$. **529.** 2) (1; 2); 4) $(\pi+2\pi n;$ $\pi+2\pi n)$, $n\in Z$. **530.** (3; 5), $\left(1;\ -\frac{1}{3}\right)$. **531.** (1; -1), $y=2x-3$; (1; 0), $y=2x-2$.

532. 2) $-5x^4+6x^2-6x$; 4) $-\frac{6}{x^4}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$; 6) $-21(4-3x)^6$;

8) $\frac{2}{(1-4x)\sqrt{1-4x}}$. **533.** 2) $-\sin x-\frac{1}{x}$; 4) $24x^3-9e^x$; 6) $-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{2x}$.

534. 2) $2e^{2x}-\frac{1}{x}$; 4) $4\cos\frac{2x}{3}+3e^{1-3x}$. **535.** 2) $x^2(1+3\ln x)$; 4) $\sin 2x+$ $+2x\cos 2x$; 6) $e^x(\cos x-\sin x)$. **536.** 2) $\frac{2x-x^4}{(x^3+1)^2}$; 4) $\frac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$.

537. 2) $f'(x)=0$ при $x=0$ и при $x=\frac{4}{9}$, $f'(x)>0$ при $0<x<\frac{4}{9}$, $f'(x)<0$ при $x<0$ и при $x>\frac{4}{9}$; 4) $f'(x)=0$ при $x=4$, $x=-3$ и $x=1{,}2$, $f'(x)>0$ при $x<-3$, $-3<x<1{,}2$ и $x>4$. $f'(x)<0$ при $1{,}2<x<4$; 6) $f'(x)=0$ при $x=1$, $f'(x)>0$ при $x>1$, $f'(x)<0$ при $x<0$ и при $0<x<1$. **538.** 2) e; 4) 0,5. **539.** 2) $y=30x-54$; 4) $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **540.** $s(4)=22$ м, $v(4)=7$ м/с. **541.** 2) $\frac{1}{2}\sin x$; 4) $3x^2\cos 2x-2(x^3+1)\sin 2x$; 6) $\frac{x^4-1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}+4x^3\sqrt[3]{x-1}$.

542. 2) $-\frac{x+8}{8x^2\sqrt{x+4}}$; 4) $\frac{2}{\sin 2x-1}$. **543.** 2) $f'(x)=0$ при $x=0$, $f'(x)>0$ при $x>0$, $f'(x)<0$ при $x<0$; 4) $f'(x)>0$ при $x>-\frac{1}{2}$; 6) $f'(x)=0$ при $x=3$, $f'(x)>0$ при $x>3$, $f'(x)<0$ при $-1<x<3$. **544.** $a\geqslant 1$. **545.** $a<-12$. **546.** 2) $a\leqslant 0$; 4) $a>12$. **547.** 2) $a\geqslant 0$; 4) $a\leqslant 0$. **548.** 2) $\frac{\pi}{4}$. **549.** 2) $y=-\frac{1}{8}\ln 2\cdot x+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}\ln 2$; 4) $y=$ $=(1+e^{-1})x$. **550.** $y=6x+\frac{19}{6}$, $y=6x-54$. **551.** 8 кв. ед. **552.** $2k$ кв. ед. **554.** 2) Возрастает на промежутке $x>0{,}3$, убывает на промежутке $x<0{,}3$; 4) возрастает на промежутке $x>-6$, убывает на промежутке $x<-6$. **555.** 2) Возрастает на промежутках $-1<x<0$ и $x>1$, убывает на промежутках $x<-1$ и $0<x<1$; 4) возрастает на промежутках $x<0$ и $x>4$, убывает на интервале $0<x<4$. **556.** 2) Убывает на промежутках $x<0$ и $x>0$; 4) возрастает на промежутке $x>5$. **557.** 2) Возрастает на интервале $0<x<3{,}2$, убывает на промежутках $x<0$ и $x>3{,}2$; 4) возрастает на промежутке $x<\frac{1}{3}$, убывает на промежутке $x>\frac{1}{3}$. **558.** 2) Возрастает на интервалах $-\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$. **559.** 2) $a\geqslant 1$. **560.** 2) $x_1=2$, $x_2=3$; 4) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **561.** 2) $x=-6$ — точка максимума; 4) $x=-8$ — точка максимума, $x=8$ — точка минимума. **562.** 2) $x=0$ — точка максимума, $y(0)=3$, $x=-2$ и $x=2$ — точки минимума, $y(-2)=y(2)=-13$; 4) $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$ — точки максимума, $y\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ — точки минимума, $y\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)=-\sqrt{3}+\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$. **563.** 2) Точек экстремума нет; 4) точек экстремума нет. **564.** 2) $x=-1$ — точка максимума, $y(-1)=0{,}25$;

$x=0$ и $x=4$ — точки минимума, $y(0)=0$, $y(4)=10\frac{2}{3}$; 4) $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$ — точки максимума, $y=\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$; $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$ — точки минимума, $y\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **565.** Если n — нечетное число, то $x=n-1$ — точка максимума; если n — четное число, то $x=n-1$ — точка максимума, $x=-1$ — точка минимума. **572.** Один корень при $c<\frac{4}{9}$, $c>4$, два корня при $c=\frac{4}{9}$, $c=1$, $c=4$; три корня при $\frac{4}{9}<c<1$, $1<c<4$. Указание: дополнительно к общему исследованию функции сравнить значения функции с числом 1. **573.** 2) Наибольшее значение равно 68, наименьшее равно -31. **574.** 2) Наибольшее значение равно -2, наименьшее равно $-2{,}5$; 4) наибольшее значение равно -1, наименьшее равно $-\sqrt{2}$. **575.** 2) Наибольшее значение равно -3. **576.** $25+25$. **577.** $25\cdot 25$. **578.** Квадрат со стороной $\frac{p}{4}$. **579.** Квадрат со стороной 3 см. **580.** 2) Наибольшее значение равно $2+e^{-2}$, наименьшее равно 1; 4) наибольшее значение равно 1,5, наименьшее равно -3. **581.** 2) 1. **582.** 2) 1. **583.** 2) 3. **584.** $\frac{a}{6}$. **585.** $x=a$. **586.** 4. **587.** (1; 1). **588.** $\frac{2}{3}\pi$. **589.** 2) Возрастает на промежутках $x<-1$ и $x>2$, убывает на интервале $-1<x<2$; 4) убывает на промежутках $x<3$ и $x>3$. **590.** 2) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 0{,}5$; 4) $x=\pi n$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. **591.** 2) $x=1$ — точка минимума. **592.** 2) $x=0$ — точка максимума, $y(0)=-3$; $x=2$ — точка минимума, $y(2)=-12{,}6$. **595.** 2) Наибольшее значение равно 0, наименьшее равно -4; 4) наибольшее значение равно 14, наименьшее равно -11. **597.** Равносторонний треугольник со стороной $\frac{p}{3}$. **598.** Куб с ребром 10 см. **601.** 2) $x=-1$ — точка минимума; 4) $x=-3$ — точка максимума, $x=4{,}5$ — точка минимума. **603.** 2) Наибольшее значение равно $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, наименьшее равно $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **604.** 12. **605.** Катеты $\frac{l}{3}$ и $\frac{l}{\sqrt{3}}$, гипотенуза $\frac{2l}{3}$. **606.** R^2. **607.** $2\sqrt{\frac{S}{15}}$; $5\sqrt{\frac{S}{15}}$. **608.** $x=-\sqrt{2}$ — точка максимума, $x=\sqrt{2}$ — точка минимума. **610.** arctg k. **613.** 2) $\frac{x^4}{4}+C$; 4) $2\sqrt{x}+C$. **614.** 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}$; 4) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8$. **616.** 2) $x^5+\frac{x^4}{2}$; 4) $-\frac{1}{x^2}-3\ln x$; 6) $3x\sqrt[3]{x}-4x\sqrt{x}$; 8) $2x^3-2x^2+3x$. **617.** 2) $2\sin x-5\cos x$; 4) $3e^x+\cos x$; 6) $x+3e^x-4\sin x$; 8) $8\sqrt{x}+3\ln x+2e^{-x}$. **618.** 2) $\frac{1}{4}(x-2)^4$; 4) $\frac{9}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}$; 6) $3\ln(x-3)+2\cos(x-1)$. **619.** 2) $\frac{1}{3}\sin(3x+4)+C$. 4) $-4\cos\left(\frac{x}{4}+5\right)+C$; 6) $\frac{1}{3}e^{3x-5}+C$; 8) $\frac{1}{3}\ln(3x-1)+C$. **620.** 2) $2x^2-x$; 4) $\frac{1}{3}\sin 3x$. **621.** 2) $4e^{\frac{x}{4}}-\frac{1}{2}\cos 2x$; 3) $-10\cos\frac{x}{5}-$

$\frac{5}{2}e^{2x+\frac{1}{3}}$; 4) $21\sin\frac{x}{7}+\frac{2}{3}e^{3x-\frac{1}{2}}$; 6) $\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{5}}-\cos(4x+2)$; 8) $\frac{8}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{3}{2}\ln(2x-5)$. **622.** 2) $\frac{3x^4-3x^2+4x}{10}$; 4) $2x^3-\frac{5}{2}x^2-6x$. **623.** 2) $\left(\frac{9}{7}x-\frac{3}{2}\right)\times\times x\sqrt[3]{x}$; 4) $\left(\frac{1}{3}x-3\right)2\sqrt{x}$. **624.** 2) $\frac{1}{2}\cos 2x$. **625.** $6\sin\frac{x}{2}-\frac{2}{5}\cos 5x-2{,}8$. **626.** 2) $\ln(x+2)$; 4) $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x$. **628.** 2) $12\frac{1}{3}$; 4) 6; 6) $\frac{1}{2}$. **629.** 2) $1\frac{1}{3}$; 4) $1\frac{1}{3}$. **630.** 2) $12\frac{2}{3}$. **631.** 2) 18. **632.** 2) 9; 4) 5; 6) $\frac{3}{8}$; 8) 2. **633.** 2) 1; 4) 2; 6) 0. **634.** 2) 11; 4) $2\frac{2}{3}$; 6) 10. **635.** 2) 68; 4) e^6-e^2. **636.** 2) $-\frac{11}{12}$; 4) 5. **637.** 2) $4\sqrt{3}$; 4) 8. **638.** 2) $\frac{4}{3}\ln 2{,}5$; 4) 0,5. **639.** 1) π; 2) 0,5; 3) 0,5; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $16\frac{16}{105}$; 6) $1{,}5+\ln 2$. **640.** $b=2$. **641.** 1) $8\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{2}{3}$; 3) $2\ln 4$. **642.** 2) $6\frac{1}{6}$; 4) 4. **643.** 2) $\frac{11}{12}$. **644.** 2) $1\frac{1}{3}$. **645.** 2) $\frac{1}{8}$; 4) $\frac{1}{6}$. **646.** 2) 8. **647.** 2) $2-\sqrt{2}$. **648.** 2) 4,5. **649.** 2) $\frac{\pi}{2}-1$. **650.** 2) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 4) 6,75. **651.** 1) 18; 2) $\ln 2-\frac{5}{8}$. **652.** (0,5; 1,75). **653.** 2) $21\frac{1}{3}$ м. **654.** $10\frac{2}{3}$ м. **655.** 2) $y=2x^3-4x^2+x+C$; 4) $y=2\sin 2x+C$; 6) $y=\sin x+\cos x+C$. **656.** 2) $y=-2\sin x+1$; 4) $y=2x+x^2-x^3+2$; 6) $y=3-e^{-x}$. **658.** $\frac{10\ln 0{,}5}{\ln 0{,}999}\approx 6927$ лет. **659.** 0,09 Дж. **660.** 0,96 Дж. **661.** 2) $-\cos x-1$; 4) e^x+1; 6) $2x-x^2+3$. **662.** 2) 12; 4) -2; 6) $\frac{3}{8}$; 8) 2. **663.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $1\frac{151}{192}$; 6) $\frac{4}{9}$. **664.** 2) 0; 4) -3; 6) $8\frac{2}{3}$. **665.** 2) $-\frac{1}{6}$; 4) $2\sin 12$. **666.** 2) 1; 4) $1\frac{1}{3}$. **667.** 2) $2\frac{2}{3}$; 4) $\frac{8}{9}$. **668.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $4\ln 3-2$. **669.** 1) 1,75; 2) $3\frac{8}{15}$. **670.** $k=p$. **671.** 2) $\frac{5}{8}$; 4) $3\frac{1}{9}$; 6) $\frac{2}{e}$; 8) -2. **672.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{1}{3}$. **674.** $-2<x<3$. **675.** 2) -3. **676.** 2) $\frac{\pi}{3}$. **677.** 2) $y=--6x-1$. **679.** 2) 3,5 и 0; 4) 3 и 1; 6) $2e^2$ и $-\frac{1}{e}$; 8) 0,5 и 0. **680.** 1 дм. **681.** 54π см^3. **682.** 6. **683.** 2. **684.** $\sin x-\frac{1}{x}-1$. **685.** 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; 4) $1\frac{1}{3}$; 6) $2\frac{2}{3}$; 8) $\ln 3$. **686.** 2) $1\frac{1}{3}$; 4) $9\frac{1}{3}$; 6) 1. **687.** $v(10)=262$ м/с, $t\approx 37$ с. **688.** 12π. **689.** 2) $-5x^{-\frac{3}{2}}+\cdot 2x^{-1,4}-2x^{-1,2}$; 4) $5x^{-\frac{1}{6}}$. **690.** 2) $\frac{4x^2+4x-5}{(2x+1)^2}$; 4) $\frac{4}{x(1+\ln x)^2}$. **691.** 2) $\frac{2x(4x+3)}{3\sqrt[3]{x+1}}$; 4) $\cos 2x-2x\sin 2x$. **692.** $x=2$. **693.** 2) $f'(2)>0$. **694.** $f'(0)=4$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=8(7+4\sqrt{3})$. **695.** $-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 0$. **696.** -1. **697.** 9. **698.** (3; 9). **699.** (1; 2), (0,5; 2,25). **700.** $(-1;-3)$. **701.** 2) $y=0{,}5(1+\ln x-x\ln 2)$; 4) $y=2x-1$. **702.** 2) Возрастает на промежутках $x<0$ и $x>0$. **703.** 2) $x=6$ — точка минимума. **704.** 2) $x=-0$ — точка минимума, $x=-2\frac{2}{3}$ — точка максимума. **705.** 2) 1,5 и 1. **707.** $p=$

$=-10$, $q=26$. 708. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ дм. 709. $3\sqrt[3]{2\pi v^2}$. 710. $\frac{R}{\sqrt{2}}$. 711. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. 712. $\frac{4R}{3}$. 713. $\frac{\pi}{3}$. 714. $\frac{1}{8}(2\sin 4x-9)$. 715. $\frac{3}{4}\ln(4x-1)+C$. 716. 2) 11,25; 4) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$; 6) $5{,}5+7\ln 2$. 717. 2) $2\frac{2}{3}$; 4) $\ln 2$. 718. $b>\sqrt{3}-1$, $b<-3-\sqrt{3}$. 719. $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. 721. 3 или 12. 722. Нет, так как наименьшее расстояние между кораблями будет равно 3 милям через 48 мин. 723. $1\frac{11}{12}$. 724. $a=1$, $S=4$. 725. $\operatorname{arctg}\frac{4}{\pi^2}$.

Упражнения для итогового повторения курса алгебры

726. 0,08. 727. 30. 728. $3\frac{1}{3}\%$. 729. 400%. 730. 45. 731. 13,5. 732. 62%. 733. 30%, 10%, 60%. 734. 365 р. 735. 21%. 736. 8. 737. 600. 738. 636 р. 54 к., 655 р. 64 к. 739. 408 р. 85 к. 740. 2) 4; 4) 1,02. 741. 2) $\frac{4}{15}$; 4) 2. 742. 2) 0,5; 4) 20,8. 743. 2) 1083. 744. 2) 64; 4) 25. 745. 2) -10; 4) $\frac{3}{7}$; 6) 160. 746. 2) Второе; 4) первое. 747. 2) $\sqrt{3}$; 4) 0; 6) $2b$. 748. 2) $|b|\cdot(2b^2+1)$; 4) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$. 794. 2) $2\sqrt{5}$; 4) $\frac{b\sqrt{a}}{2a}$; 6) $3(\sqrt{6}-\sqrt{5})$; 8) $\sqrt{11}-\sqrt{3}$. 750. 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$. 751. 2) $2\frac{7}{9}$; 4) $1\frac{4}{11}$; 6) $\frac{16}{75}$. 752. 2) 2,(1); 4) 5,(18). 753. 2) Да. 756. 2) Да; 4) да. 758. 1) $2\sqrt{3}\approx$ $\approx 3{,}46$ см; 2) $2\arcsin\frac{9}{16}\approx 68{,}5°$. 759. $120\operatorname{tg}36°\approx 87$ м. 760. $130(\operatorname{tg}22°+\operatorname{tg}44°)\approx$ ≈ 178 м. 761. 2) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$; 4) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{24}{7}$, $\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\cos\alpha=\frac{7}{25}$. 762. 2) 0,5; 4) 0,5; 6) $-\frac{3}{4}$. 763. 2) $-\frac{3}{7}$; 4) $-\frac{4}{9}$. 764. 2) $\frac{3(b+1)}{b+3}$; 4) $\frac{b-4}{2b}$. 765. 2) $\frac{a^2-4b^2}{ab}$; 4) 0. 766. 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 767. 2) $\frac{1}{ab}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. 768. 2) $16a^2$. 769. 2) $-6\sqrt{b}$; 4) $\sqrt[12]{a^{-2}b}$. 770. 2) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\times$ $\times\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$. 772. 2) $\sin\alpha$; 4) $\sin\alpha$; 6) $\operatorname{tg}\alpha$. 773. 2) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; 4) $-\sin 2\alpha$; 6) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. 774. 2) $-\sin^2\alpha$; 4) $-\cos 2\alpha\cos 4\beta$. 780. 2) $x=3$; 4) $x=8$. 781. $a=-6$. 782. $b=3$. 783. 2) $x=3$. 784. 2) $x=-1{,}25$; 4) $x=-1$; 6) $x=5$. 785. 2) $x=\frac{1}{a-b}$. 786. 2) $x_1=-2$, $x_2=\frac{2}{3}$; 4) $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{3}$; 6) $x_{1,2}=\pm 5$. 787. 2) $x_1=2$, $x_2=10$; 4) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{3}{2}$. 788. 2) $x=4$; 4) $x=3$. 789. 2) Корней нет. 790. 2) $x=2$. 791. 2) $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. 792. 2) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$, $x_{3,4}=\sqrt{6}$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=$

$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $x=1$. 793. 2) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_3=-1$, $x_4=3$; 4) $x_1=2$, $x_2=0{,}25$. 794. 2) $x_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm b$; 4) $x_1=a$, $x_2=-2{,}5a$. 795. $a>0$, $b^2=4ac$. 797. 2) $x=6$; 4) $x=3\frac{2}{3}$. 798. 2) $x_1=3$, $x_2=\frac{5}{3}$; 4) $x=1$. 799. $x=3$. 800. $x=5$. 801. 2) Корней нет; 4) $x_1=2$, $x_2=-1$; 6) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=\frac{16}{9}$. 802. 2) $x_1=3$, $x_2=2$; 4) $x_1=3$, $x_2=-1$. 803. 2) $x=3$; 4) $x=3$. 804. 2) $x_1=4$, $x_2=-2$. 805. 2) $x=25\sqrt{3}$; 4) $x=\sqrt{3}$. 806. 2) $x_1=1$, $x_2=9$. 807. 2) $x=9$; 4) $x=18$. 808. 2) $x_1=0{,}01$, $x_2=100$; 4) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=9$; 6) $x_1=1$, $x_2=4$. 809. Нет. 810. 2) $z_{1,2}=3\pm i$; 4) $z_{1,2}=-2+\frac{i}{2}$; 6) $z_{1,2}=1\pm i\sqrt{2}$. 811. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$. 812. 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. 813. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\pi n$, $n\in Z$; 4) корней нет. 814. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 815. 2) $x=\frac{\pi}{8}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi n}{5}$, $n\in Z$. 816. 2) $x=\pi+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+\pi n$, $n\in Z$. 817. 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in Z$. 818. 2) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}$, $n\in Z$. 819. 2) Корней нет; 4) $x=\pi n$, $n\in Z$. 820. 2) $x>-2$; 4) $x>1$. 821. 2) $x>56$; 4) $x<0{,}1$; 6) $x>5$. 822. 2) $x<0{,}5$, $x>\frac{2}{3}$; 4) $x<\frac{3}{11}$; 6) $-3\frac{1}{3}<x<40$; 8) $-2<x<8$. 823. 2) $x<\frac{2}{3}$, $x>\frac{3}{2}$; 4) $x<-\frac{2}{9}$, $x>\frac{5}{2}$; 6) $x<2\frac{4}{7}$. 824. 2) $-16<x<3$; 4) $x<4$, $x>6$; 6) $x<-3$, $x\geqslant -2{,}5$. 825. 2) $x\leqslant 5$, $x\geqslant 9$; 4) $-3<x<7$; 6) $x\in R$; 8) решений нет; 10) $-1{,}4\leqslant x\leqslant 0$. 826. 2) $x>-4$. 827. 2) $-7<x<2$, $x\geqslant 5$; 4) $x<-2-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}<x<1$; 6) $x<-4$, $-1<x<2$, $x>3$. 828. $-5\leqslant x\leqslant -3$. 829. $m=2$. 830. $m=8$, $m=9$. 831. $x=6$. 832. $x=-1$. 833. 2) $x<2{,}8$, $x>4$; 4) $1{,}25<x<1{,}75$; 6) $x<2$; 8) $x<-2$, $1<x<2$, $x>5$; 10) $\frac{1-\sqrt{73}}{6}<x<-\frac{2}{3}$, $1<x<\frac{1+\sqrt{73}}{6}$. 834. 2) $-1<x<5$; 4) $-1{,}5<x\leqslant 0{,}9$. 835. 2) $x<1$. 836. 2) Решений нет. 837. 2) $x<1$, $x>3$. 838. 2) $-\sqrt{5}\leqslant x<-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<x\leqslant\sqrt{5}$. 839. 2) $1<x<2$; 4) $x>3$. 840. 2) $-3<x<-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}<x<3$. 841. 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. 842. 2) $-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n<x<\arcsin\frac{1}{4}+\pi+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n<$

$<x<\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 846. 2) (2; 1); 4) (5; -3). 847. 2) (-1200; 500); 4) (7; 2). 848. 2) (-8; -2), (8; 2); 4) (3; 4), (4; 3); 6) (8; 4), (-8; -4). 849. 2) (7; 6); 4) (2; 3), $\left(-9;\ 28\frac{2}{3}\right)$. 850. 2) (3; 1), ($-3$; -1); 4) (3; 5), (3; -5). 851. 2; 12. 852. 2) $x>5$. 853. 1 мин. 854. 126 км. 855. 1080 км. 856. 16 дней. 857. 12 ч. 858. 91 га. 859. 8; 12. 860. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. 861. 432 детали. 862. 15 км/ч. 863. 25 и 20 билетов или 20 и 15 билетов. 864. 3 км/ч. 865. 21 ц, 20 ц. 866. 1400 шагов. 867. 3; -6; 12; -24. 868. 27. 869. 1; 3; 9; 15 или 16; 8; 4; 0. 870. 2 или $12\frac{2}{5}$. 871. В 3 раза. 872. 16 см^2. 873. $b=-2$. 874. $k=-1$. 875. 2) $k=-1$, $b=3$; 4) $k=0$, $b=-2$. 876. $y=-\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}$, $y=-\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$. 877. 2) Нет; 4) да. 878. 2) $3\frac{1}{3}$. 879. 2) $x<\frac{1}{3}$. 880. 2) $x>0{,}5$. 881. $x>1$. 882. $x<-\sqrt{3}$. 885. 2) Да. 886. 2) (-1; 3), (5; 3). 887. 4) $x<-2$, $x>2$. 888. 4) $x\neq 0$. 889. 2) Да; 4) да. 890. 2) Нечетная; 4) четная. 891. 2) $\frac{10\pi}{3}$. 893. 2,25. 894. 2) (0; 2), (2; 0), (0,5; 0). 898. 2) $x<-5$, $x>3$; 4) $x\leqslant -7$, $x>6$. 899. 2) $\frac{1}{2}(5-\sqrt{41})<x<2$, $3<x<\frac{1}{2}(5+\sqrt{41})$; 4) $3<x\leqslant 3\frac{1}{3}$. 900. 2) $y\leqslant 7$; 4) $y\neq 2$. 901. 2) $-1-\frac{\pi}{4}\leqslant y\leqslant 1-\frac{\pi}{4}$; 4) $-\sqrt{1{,}25}\leqslant y\leqslant\sqrt{1{,}25}$. 902. $\frac{\pi}{4}$. 903. e^{-1}. 904. $-\frac{\pi}{4}$. 905. $y=x+1$. 906. $y=3x-3$. 907. 132; -57. 908. 9; 4. 909. (1; 1). 910. $\frac{49}{27}$. 911. 2. 912. $\frac{\pi p^3}{216}$. 913. $r=R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $H=R\frac{2}{\sqrt{3}}$. 914. $R=H$. 915. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. 916. $r=\frac{2R}{3}$, $h=\frac{H}{3}$. 917. 2) $x=0$ — точка минимума, $x=0{,}4$ — точка максимума. 918. (1; 0), (-1; 4). 919. $y=7x-43$. 921. 2) $3\frac{2}{3}$; 4) 4,5; 6) 18. 922. 2) 4,5; 4) $\frac{5}{12}$. 923. 2) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}-2$; 4) $\frac{8}{3\ln 3}$. 924. 1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $x\geqslant 2$; 3) 100; 4) $y=\frac{x^4-7}{12}$; $\frac{3}{4}$; 5) 0,25. 925. 1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $-4<x<0$; 3) 160; 4) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}$; $3\frac{1}{3}$; 5) 1,5. 926. 1) $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $x>3$; 4) 31,5; 5) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. 927. 1) $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $0{,}5<x<2$; 4) $16\frac{2}{3}$; 5) $9a$. 928. 1) 30 км/ч; 2) $\frac{1}{2\cos\alpha}$; 3) $x=4{,}5$; 4) 4; 5) $0<x\leqslant 2$. 929. 1) 3 км/ч; 2) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$; 3) $x=0$; 4) 12; 5) $0<x\leqslant 1$. 930. 1) $\sqrt{3}$; 2) $x=3$; 3) $x>0{,}5$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 1. 931. 1) 1; 2) $x=-1$; 3) $1<x<5$; 4) $1\frac{1}{3}$; 5) 12,5. 932. 1) $x=2\pi n$, $n\in Z$; 2) $2<x<4$; 3) правая; 4) $x_{1,2}=\pm 8$; 5) $4\sqrt{2}$ см, 8 см. 933. 1) $x=-1{,}5$; 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$;

1) $10-8\ln 2\approx 4{,}48$; 5) $21\frac{1}{3}$. **934.** 1) $-5\leqslant x\leqslant 3$; 2) $x\geqslant 3$; 3) $x_1=0$, $x_2=-19$. Указание: ввести обозначения $y=\sqrt[3]{8-x}$; $z=\sqrt[3]{27+x}$, откуда $y^3+z^3=35$ (1). Исходное уравнение записать так: $y^2-yz+z^2=7$ (2). Поделив уравнение (1) на (2), получить $y+z=5$ (3). Решая систему уравнений (2), (3), найти значения y и далее использовать введенные обозначения; 4) $x_1=73$, $x_2=-8$. **935.** 1) $x=3$; 2) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_3=3$; 3) $x_1=-1$, $x_2=3$; 4) $x_1=-1$, $x_2=4$, $x_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$. **936.** 1) $x=\pi+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 3) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) корней нет. **937.** $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. **938.** $x_3=3$. **939.** 1) $(a;\ a^2)$, $(a^2;\ a)$, если $a>0$ и $a\neq 1$; $(-a-1;\ (a+1)^2)$, $((a+1)^2;\ -a-1)$, если $a<-1$ и $a\neq -2$. **940.** 1) $(1;\ 1)$, $\left(\frac{9}{4};\ \frac{27}{8}\right)$; 2) $(1;\ 1)$, $(2;\ 4)$; 3) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{7\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in Z$; 4) $\left(-\frac{1}{6}+n;\ \frac{1}{6}+n\right)$, $n\in Z$; 5) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$; 6) $\left((-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi n;\ (-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k+\pi n\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+2\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. **941.** $x<-4$, $-3<x<-2$, $-1<x<1$, $x>2$. **942.** 1) $x\geqslant 2{,}5$; 2) $\frac{2}{3}\leqslant x<6$; 3) $-2<x<1$; 4) $-3\leqslant x<1$; 5) $2<x\leqslant 3$. **947.** 1) $x=1$; 2) $x=0{,}5$; 3) $x=\frac{1}{7}$; 4) $x=\frac{8}{3}$. **948.** 1) $x=0{,}5$; 2) $x=2$; 3) $x_1=2$, $x_2=32$; 4) $x=1{,}5$; 5) $x_1=\sqrt[4]{2}$, $x_2=2$; 6) $x=4$. **949.** 1) $x=4$; 2) $x=3$; 3) $x=8$; 4) $x=-9$. **950.** 1) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{2\pi n}{9}$, $n\in Z$; 2) 0, $\frac{\pi}{2}$, π; 3) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in Z$; 5) $x=\frac{\pi}{4}n$, $n\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **951.** 1) $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 3) $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{12}+(2n+1)\pi$, $n\in Z$. **952.** 1) $x=\frac{1}{2}\left((-1)^n\arcsin\frac{2}{3}+\pi n\right)$, $n\in Z$; 2) $x=-\frac{1}{2}\left((-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **953.** $x=\frac{\pi}{3}+(2n+1)\pi$, $n\in Z$. **954.** $x=\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **955.** $x=\frac{\pi}{3}$. **956.** 1) $(1;\ 2)$, $\left(-4;\ \frac{1}{3}\right)$; 2) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $(2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$; 3) $(1;\ 2)$, $(-1;\ 6)$, $(\sqrt{2};\ 4-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};\ 4+\sqrt{2})$; 4) $(1;\ 2;\ 3)$, $(1;\ 5;\ 0)$, $(3;\ 2;\ -1)$, $(3;\ 5;\ -2)$. **957.** 1) $(1;\ \log_3 2)$; 2) $(3;\ -9)$; 3) $(-17;\ \log_2 10)$; 4) $(1;\ 2)$, $(-1;\ 0)$. **958.** 1) $(2;\ 10)$, $(10;\ 2)$; 2) $(0;\ 1)$, $(2;\ -1)$; 3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **959.** 1) $-1<x<0$, $0<x<4$; 2) $-2\leqslant x<-1$, $x>-1$; 3) $-8<x<8$; 4) $1<x<5$. **960.** 1) $x<-\frac{1}{2}$,

$x>2$; 2) $x>3$; 3) $-1\leqslant x<0$; 4) $-2<x<3$. **961.** 1) $x\geqslant 2$; 2) $\frac{1}{9}<x\leqslant\frac{1}{3}$, $x>1$; 3) $-\frac{1}{4}<x<0$, $0<x<\frac{1}{6}$; 4) $-311<x<-11$, $1<x<1{,}5$. **962.** 18 и -2. **963.** 4. **964.** $4\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}-1$ и $-4\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}-1$. **965.** $\frac{7}{23}$. **966.** $\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{\pi};\ -\frac{\pi}{4}\right)$. **967.** $y=x+1$, $y=\frac{9}{\sqrt[3]{25}}x-\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$. **968.** $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{9}\right)$. **969.** $(-2;22)$, $(2;10)$. **970.** $k=2$. **971.** $p=-2$, $q=0$, $d=1$. **972.** 2,25. **973.** $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **974.** $a=-3{,}5$. **975.** $a=1-\sqrt{2}$, $a=5+\sqrt{10}$. **976.** $a<-4$, $-\frac{5}{4}<a<0$. **977.** $2\sqrt{5}$. **978.** $b_1=3$, $q=4$ или $b_1=48$, $q=\frac{1}{4}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

Глава I.

1) См. рис. 99.
2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}>\left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$; $5^{-0,2}>5^{-1,2}$.
3) $x=2$; $x_1=1$, $x_2=-5$; $x=1$; $x_1=0$, $x_2=-2$.
4) $x>4$, $-2\leqslant x\leqslant 2$.

Глава II.

1) 3; -2; 13; 49; 2.
2) См. рис. 100.

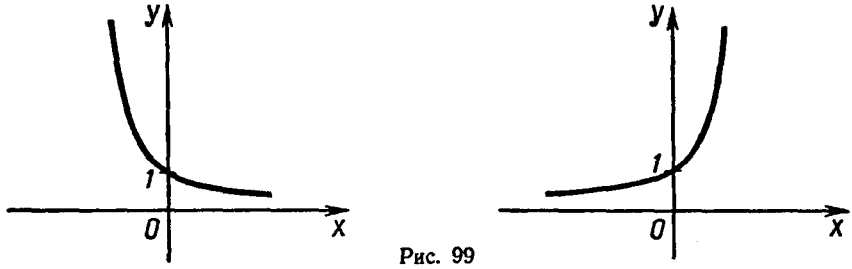


Рис. 99

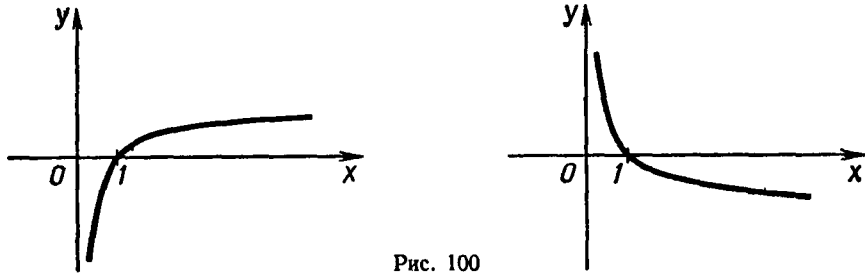


Рис. 100

3) $\log_{0,2} 3 < \log_{0,2} 25$; $\log_2 0{,}7 < \log_2 1{,}2$.

4) $x=8$; $x=1$; $x_1=0$, $x_2=9$.

5) $\left(6; \frac{1}{2}\right)$; 6) $1<x\leqslant 10$; $-3<x<2$.

Глава III.

1) 1; $\sqrt{3}$; π.

2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

3) $\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{5}{6}\pi+2\pi n$, $n\in Z$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3}{2}\pi+2\pi n$, $n\in Z$.

Глава IV.

1) $x\neq\frac{\pi}{8}(1+2n)$, $n\in Z$; нет.

2) $\sin x=1$ при $x=\frac{\pi}{2}$; $\cos x=1$ при $x=0$, 2π; $\sin x=-1$ при $x=-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$; $\cos x=-1$ при $x=-\pi$, π; $\sin x=0$ при $x=0$, π, 2π; $\cos x=0$ при $x=-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$; $\sin x>0$ при $0<x<\pi$; $\cos x>0$ при $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$; $\sin x<0$ при $-\pi<x<0$, $\pi<x<2\pi$; $\cos x<0$ при $-\pi<x<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$; возрастают: $\sin x$ при $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$; $\cos x$ при $-\pi<x<0$, $\pi<x<2\pi$; убывают: $\sin x$ при $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$; $\cos x$ при $0<x<\pi$.

3) $\operatorname{tg} x=0$ при $x=-\pi$, 0; $\operatorname{tg} x>0$ при $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{tg} x=0$ при $-\frac{3}{2}\pi<x<-\pi$, $-\frac{\pi}{2}<x<0$.

4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

Глава V.

1) 85;

2) $-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}-e^x$; $12(3x-5)^3$; $6\cos 2x\cos x-3\sin 2x\sin x$; $\frac{x^4+15x^2}{(x^2+5)^2}$.

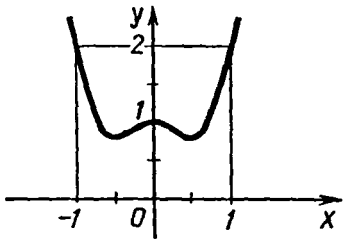
3) $k=-3$.

4) $\alpha=-\frac{\pi}{4}$.

Глава VI.

1) Возрастает при $-1<x<1$, убывает при $x<-1$, $x>1$.

2) Точка максимума $(-3; -2)$; точка минимума $(3; 2)$.



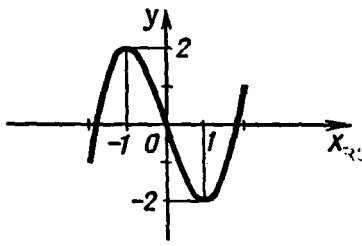


Рис. 101

3) См. рис. 101.

4) Наибольшее $y(5)=5\frac{4}{5}$, наименьшее $y(2)=4$.

5) 2 м.

Глава VII.

2) $F(x)=x^3+x^2-3x-1$.

3) $11\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; 1; -1.

4) а) $20\frac{5}{6}$ кв. ед.; б) 36 кв. ед.

БЕСЕДА «НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС И МАТЕМАТИКА»

Одной из характерных особенностей нашего времени является широкое применение математических методов и электронно-вычислительных машин в самых различных областях человеческой деятельности. «Диагноз ставит ЭВМ», «Соавтор конструктора» — такие заголовки нередко встречаются сегодня в газетах. Бурный процесс математизации науки, техники, народного хозяйства начался в пятидесятых годах после появления и быстрого совершенствования ЭВМ. Он привел к формированию современной прикладной математики, которая включает круг вопросов, связанных с использованием математических методов и вычислительной техники.

Математика является одной из самых древних наук. Она зародилась на заре человеческой цивилизации под влиянием потребностей практики. Строительство, измерение площадей земельных участков, навигация, торговые расчеты, управление государством требовали умения производить арифметические вычисления и определенных геометрических знаний. В дальнейшем математика развилась в стройную логическую систему как составная часть общего комплекса научных знаний. Потребности естествознания, техники, всей практической деятельности людей постоянно ставили перед математикой новые задачи и стимулировали ее развитие. В свою очередь прогресс в математике делал математические методы более эффективными, расширял сферу их применения и тем самым способствовал общему научно-техническому прогрессу.

Роль математики в различных областях человеческой деятельности и в разное время была существенно различной. Она складывалась исторически, и существенное влияние на нее оказывали два фактора: уровень развития математического аппарата и степень зрелости знаний об изучаемом объекте, возможность описать его наиболее существенные черты и свойства на языке математических понятий и уравнений или, как теперь принято говорить, возможность построить «математическую модель» изучаемого объекта.

Математическая модель, основанная на некотором упрощении, идеализации, не тождественна объекту, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность сформулировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для анализа универсальным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта. Математика позволяет единообразно описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т. е. спрогнозировать результаты будущих наблюдений.

А ведь прогнозирование всегда трудная задача, и оправдывающиеся прогнозы являются предметом особой гордости любой науки.

Сложность построения и исследования математической модели существенно зависит от сложности изучаемого объекта. Математические методы давно и весьма успешно применяются в механике, физике, астрономии, т. е. в науках, в которых изучаются наиболее простые формы движения материи. Математика стала языком этих наук, относящихся к разряду точных. Значительную роль играла также математика в технике. Этим вплоть до недавнего времени исчерпывалась сфера широкого применения математических методов. Ситуация резко изменилась с появлением ЭВМ. Причина этого заключается в следующем. В математике часто встречаются задачи, решения которых не удается получить в виде формулы, связывающей искомые величины с заданными. Про такие задачи говорят, что они не решаются в явном виде. Для их решения стремятся найти какой-нибудь бесконечный процесс, сходящийся к искомому ответу. Если такой процесс указан, то, выполняя определенное число шагов и затем обрывая вычисления (их нельзя продолжать бесконечно), мы получим приближенное решение задачи. Эта процедура связана с проведением вычислений по строго определенной системе правил, которая задается характером процесса и называется алгоритмом.

Такой подход к решению математических задач был известен еще до появления ЭВМ, но применялся весьма редко из-за исключительной трудоемкости больших вычислений. Когда Лаверье «открыл» за письменным столом «на кончике пера» новую планету (Нептун), рассчитав ее траекторию по возмущениям траектории планеты Уран, то это было научным подвигом, навсегда вошедшим в историю науки. Однако в большинстве случаев исследователи стремились избегать больших вычислений. Поэтому сложные математические модели, для которых не удавалось получить ответа в виде формул, либо вообще не рассматривались, либо упрощались с помощью дополнительных предположений. Упрощение модели снижало степень ее соответствия изучаемому объекту, делало результаты исследования объекта менее точными и, следовательно, менее интересными, а иногда и приводило к ошибкам.

Опытный вычислитель тратил на выполнение одного арифметического действия в среднем за рабочую смену около полминуты. Современные ЭВМ выполняют миллионы операций в секунду. Таким образом, за короткий срок, порядка 30 лет, благодаря ЭВМ скорость проведения вычислений возросла примерно в 100 миллионов раз. Такого скачка не было за всю историю человечества ни в одной сфере человеческой деятельности.

Применение численных методов на базе ЭВМ сразу существенно расширило класс математических задач, допускающих

исчерпывающий анализ. Теперь уже исследователю при построении математической модели какого-то объекта не нужно стремиться к упрощениям, которые были необходимы раньше при желании получить ответ в явном виде. Его внимание прежде всего должно быть направлено на то, чтобы правильно учесть все наиболее существенные особенности изучаемого объекта и отразить их в математической модели. После того как модель построена, встает вопрос о разработке алгоритма решения соответствующей математической задачи и его реализации на ЭВМ. Таким образом, ЭВМ изменили подход к применению математики как метода исследования. Они вызвали переориентацию многих сложившихся направлений математики и развитие ряда новых.

Сегодня ЭВМ являются одним из определяющих факторов научно-технического прогресса. Их применение способствует ускорению развития ведущих отраслей народного хозяйства, открывает принципиально новые возможности проектирования сложных систем при значительном сокращении сроков их разработки и внедрения в производство, обеспечивает выбор оптимальных режимов производственно-технологических процессов, создает условия для совершенствования управления и повышения производительности труда. Если обычно машины брали на себя физические функции человека в процессе производства, делали его сильнее, то ЭВМ помогают человеку в умственной деятельности, делают его умнее. Они являются одним из важных факторов превращения науки в непосредственную производительную силу нашего общества. Без ЭВМ не могли бы развиваться многие крупные научно-технические проекты современности (космические исследования, атомная энергетика, сверхзвуковая авиация и т. д.).

Благодаря ЭВМ идет интенсивный процесс математизации не только естественных и технических, но также и общественных наук. Важное значение приобрело применение математических методов в экономике. Математическое моделирование начинает широко использоваться в химии, геологии, биологии, медицине, психологии, лингвистике. Большое внимание уделяется подготовке высококвалифицированных кадров, способных реализовать те огромные возможности, которые открывает эффективное использование ЭВМ. Во многих университетах и институтах созданы факультеты прикладной и вычислительной математики. Подтверждается точка зрения К. Маркса, который, по словам П. Лафарга, считал, что «наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой».

Академик А. Н. Тихонов,
профессор Д. П. Костомаров

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Арккосинус числа 58
Арксинус числа 63
Арктангенс числа 69

Гармонические колебания 105
Геометрический смысл производной 133

Дифференциальное уравнение 179
Дифференцирование 119
Дифференцируемая функция 119

Интеграл от функции на отрезке 168
Интегральная сумма 170
Интегрирование 164

Касательная к графику функции 134
Косинус 47
Криволинейная трапеция 167

Логарифм числа 19
— десятичный 24
— натуральный 24
Логарифмирование 19
Логарифмическая функция 27
Логарифмические неравенства 29
— уравнения 29

Наибольшее значение функции 154
Наименьшее значение функции 154
Непрерывная функция 148

Обратная функция 31
Основное логарифмическое тождество 19

Первообразная функции 161
Периодическая функция 90
Период функции 90
Площадь криволинейной трапеции 167
Показательная функция 4
Показательные неравенства 9
— уравнения 8
Производная функции 118
— логарифмической функции 128
— показательной функции 128
— произведения 125
— суммы 124
— тригонометрических функций 129
— частного 125

Равносильные уравнения 35
Разностное отношение 118

Синус 47
Следствие уравнения 34
Стационарная точка 146
Степенная функция 4

Таблица первообразных 164
Тангенс 47
Теорема Ферма 146
Точка максимума функции 145
— минимума функции 145
— экстремума 145
Тригонометрические неравенства 79
— уравнения 57
— формулы 47
— функции 86

Угловой коэффициент прямой 133

Формула Ньютона — Лейбница 168
— перехода для логарифмов 24

Элементарные функции 128

СОДЕРЖАНИЕ

Глава I. Показательная функция

§ 1. Свойства показательной функции и ее график 3
§ 2. Показательные уравнения и неравенства 8
Упражнения к главе I 15

Глава II. Логарифмическая функция

§ 3. Логарифмы 18
§ 4. Свойства логарифмов 21
§ 5. Десятичные и натуральные логарифмы 24
§ 6. Логарифмическая функция и ее график 27
§ 7. Обратная функция 31
§ 8. Логарифмические уравнения 34
§ 9. Логарифмические неравенства 39
Упражнения к главе II 42

Глава III. Тригонометрические уравнения и неравенства

§ 10. Тригонометрические формулы (повторение) 47
§ 11. Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов . . . 53
§ 12. Уравнение $\cos x = a$ 57
§ 13. Уравнение $\sin x = a$ 62
§ 14. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ 67
§ 15. Решение тригонометрических уравнений 72
§ 16. Примеры решения простейших тригонометрических неравенств . . 79
Упражнения к главе III 81

Глава IV. Тригонометрические функции

§ 17. Область определения и множество значений тригонометрических функций 86
§ 18. Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций 89
§ 19. Функция $y = \cos x$, ее свойства и график 92
§ 20. Функция $y = \sin x$, ее свойства и график 97
§ 21. Функция $y = \operatorname{tg} x$, ее свойства и график 101
Упражнения к главе IV 107
Упражнения для повторения курса алгебры и начал анализа X класса 109

Глава V. Производная и ее применения

§ 22. Производная 117
§ 23. Производная степенной функции 121
§ 24. Правила дифференцирования 124
§ 25. Производные некоторых элементарных функций 128
§ 26. Геометрический смысл производной 133
Упражнения к главе V 138

Глава VI. Применение производной к исследованию функций

§ 27. Возрастание и убывание функции 142
§ 28. Экстремумы функции 145
§ 29. Применение производной к построению графиков функций . . . 148
§ 30. Наибольшее и наименьшее значения функции 154
Упражнения к главе VI 158

Глава VII. Интеграл

§ 31. Первообразная 161
§ 32. Правила нахождения первообразных 164
§ 33. Площадь криволинейной трапеции и интеграл 167
§ 34. Вычисление интегралов 171
§ 35. Вычисление площадей с помощью интегралов 174
§ 36. Применение производной и интеграла к решению практических задач 179
Упражнения к главе VII 183
Упражнения для повторения курса алгебры и начал анализа XI класса 186
Упражнения для итогового повторения курса алгебры 192
Задачи для внеклассной работы 217
Краткие теоретические сведения по курсу алгебры и начал анализа 222
Ответы и указания 230
Беседа «Научно-технический прогресс и математика» 249
Предметный указатель 252

Учебное издание

Шавкат Арифджанович Алимов
Юрий Михайлович Колягин
Юрий Викторович Сидоров
Надежда Евгеньевна Федорова
Михаил Иванович Шабунин

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

УЧЕБНИК ДЛЯ 10—11 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редакторы *Н. А. Шагирова, Л. Н. Белоновская*
Младший редактор *Л. И. Заседателева*
Художники *Б. Л. Николаев, В. В. Костин*
Художественный редактор *Ю. В. Пахомов*
Технические редакторы *М. М. Широкова, Л. М. Абрамова*
Корректор *И. А. Корогодина*

ИБ № 13 889

Сдано в набор 16.04.91. Подписано к печати 23.10.91. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типограф. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 16+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 16,69. Уч.-изд. л. 12,10+0,42 форз. Тираж 1 335 000 экз. Заказ № 41. Цена 1 р. 80 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и массовой информации РСФСР.
129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знаме и полиграфический комбинат Министерства печати и массовой информации РСФСР. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Школьные учебники СССР

sheba.spb.ru/shkola